Lista 4 - Topologia 2022

Zad. 1 Niech X będzie przestrzenią topologiczną. O rodzinie $\mathcal{A}$ podzbiorów X powiemy, że jest *scentrowana*, jeżeli przekrój każdej skończonej podrodziny $\mathcal{A}$ jest niepusty. Udowodnij, że X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda rodzina scentrowana domkniętych podzbiorów X jest niepusta.

Zad. 2 Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Pokaż, że jeżeli przestrzeń X jest zwarta, to każda funkcja ciągła $f\colon X \to Y$ jest jednostajnie ciągła.

Zad. 3 O zbiorze $D \subseteq X$ powiemy, że jest *lokalnie skończony w X*, jeżeli każdy $x \in X$ ma otoczenie otwarte U takie, że zbiór $U \cap D$ jest skończony. Pokaż, że jeżeli X jest zwarta, to każdy zbiór lokalnie skończony jest skończony. Podaj takie dwa homeomorficzne podzbiory A, B w $\mathbb{R}$, że A jest i B nie jest lokalnie skończony w $\mathbb{R}$.

Zad. 4 Które z poniższych przestrzeni są zwarte?

- $[0,1]^2$ z metryką centrum.
- $C[0,1]$ z metryką supremum i z metryką całkową.
- $C_p[0,1]$ z topologią zbieżności punktowej.
- $K \subseteq C[0,1]$ z metryką supremum, gdzie K jest zbiorem wielomianów stopnia ≤ 2 o współczynnikach z $[0,1]$.

Zad. 5 Udowodnij, że kostka Hilberta jest ośrodkowa. Udowodnij, że jest zwarta.

Zad. 6 Rozważmy zbiór $X = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \big([0,1) \times \{1\}\big)$ uporządkowany leksykograficznie (tzn. $\langle x, y\rangle \preceq \langle x', y'\rangle$, jeżeli $x < y$ lub $x = y$ i $x' \leq y'$). *Przedziałem* na X nazywamy zbiór postaci $[a,b] = \{x \in X \colon a \prec x \prec b\}$. Rozważmy topologię na X generowaną przez rodzinę wszystkich przedziałów. Taka przestrzeń nazywa się podwójną strzałką Sorgenfreya.

- Naszkicuj przedział $[\langle a, i\rangle, \langle b, j\rangle]$ dla wybranych $0 < a < b < 1$ i różnych $i, j \in \{0,1\}$. Dlaczego ta przestrzeń nazywa się tak, jak się nazywa?
- Pokaż, że podwójna strzałka jest ośrodkowa i zwarta. Pokaż, że nie ma przeliczalnej bazy.

Zadania rekreacyjne i problemy

Zad. 7 Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ z metryką centrum. Uzupełnij: A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest domknięty, ograniczony i ...

Zad. 8 Pokaż, że przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nie jest zwarta, a co więcej nie jest sumą przeliczalnie wielu podzbiorów zwartych.