
Lista 6 - Topologia 2022

Zad. 1 Rozważmy rzut $p: X \times Y \rightarrow X$ dany wzorem $p(x, y) = x$, przy czym Y jest przestrzenią zwartą. Pokaż, że $p[C]$ jest domknięty w X dla każdego domkniętego $C \subseteq X \times Y$. Pokaż, że to wynikanie nie musi zachodzić, gdy Y nie jest zwarta. Wersja prostsza: zrób to zadanie przy założeniu, że X i Y są metryczne. Wskazówka do wersji trudniejszej: ustal $x \notin p[C]$ i pokaż, że da się go otoczyć zbiorem otwartym rozłącznym z $p[C]$. W tym celu dla każdego $y \in Y$ ustal otoczenie bazowe punktu $\langle x, y \rangle$ rozłączne z C .

Zad. 2 Rozważmy zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i określmy na nim topologię bazą zbiorów postaci:

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

przy czym U_i jest otwarty w $\mathbb{R}$ dla każdego i . Pokaż, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dana wzorem

$$f(x) = \langle x, x, \dots \rangle$$

nie jest ciągła w tej topologii (na $\mathbb{R}$ rozważamy oczywiście topologię euklidesową). Pokaż, że ta funkcja jest ciągła, jeśli wyposażymy $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ w topologię produktową.

Jakie są inne przewagi topologii produktowej nad tą zdefiniowaną powyżej? (Pomyśl o zwartości, ośrodkowości, ...)

Zad. 3 Przestudiuj dowód lematu Urysohna z wykładu. Pokaż, że funkcja f zdefiniowana w tym dowodzie jest ciągła.

Zad. 4 Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $\mathbb{R}$ zdefiniowaną przez

$$x \sim y \iff (x = y \vee x, y \in \mathbb{Z}).$$

Pokaż, że $\mathbb{R}/\sim$ (a więc *kwiatek*) jest przestrzenią niemetryzowalną. Wskazówka: przestrzenie metryzowalne mają przeliczalne bazy w punktach (patrz zad. 11, lista 2).

Zad. 5 Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $[0, 1]^2$. Postaraj się opisać $[0, 1]^2/\sim$ w poniższych przypadkach. Które z nich są homeomorficzne z podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$? (Uwaga, w poniższych definicjach uwzględnione zostały tylko nietrywialne warunki, tzn. te, które nie wynikają z definicji relacji równoważności).

- a) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $x = y'$ i $x' = y$,
 - b) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $y = y' = 0$,
 - c) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \notin (0, 1)^2$,
 - d) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$,
 - e) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\max(x, y) = \max(x', y')$,
 - f)* $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $y = y' > 0$.
-