
Lista 8 - Topologia 2022

Zad. 1 Pokaż, że w przestrzeni zupełnej przekrój przeliczalnie wielu zbiorów gęstych otwartych jest gęsty. (Wskazówka: twierdzenie Baire'a).

Zad. 2 Niech $M > 0$. Pokaż, że zbiór

$$\{f \in C^1[0, 1] : \|f\|_{sup} + \|f'\|_{sup} \leq M\},$$

gdzie $C^1[0, 1]$ oznacza zbiór funkcji o ciągłej pochodnej, jest zwarty. (Wskazówka: użyj twierdzenia Ascoli-Arzelii).

Zad. 3 Pokaż, że ciąg funkcji $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dany wzorem $f_n(x) = nx^2$, ma wspólnie ograniczoną pochodną w 0, ale nie jest jednakowo ciągły w 0.

Zad. 4 Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $U \subseteq X$ jest otwarty, to U jest metryzowalny w sposób zupełny. (Wskazówka: niech d będzie odpowiednią metryką na X . Rozważ metrykę daną wzorem

$$d'(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, (X \setminus U))} - \frac{1}{d(y, (X \setminus U))} \right|.$$

Zad. 5 Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $G \subseteq X$ jest typu G_δ , to G jest metryzowalny w sposób zupełny. (Wskazówka: G jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych (U_n) . Dla każdego z tych zbiorów użyj poprzedniego zadania. Z przeliczalnie wielu metryk, które otrzymasz, złóż jedną metrykę.)

Zad. 6 Niech $N \subseteq [0, 1]$ będzie zbiorem liczb normalnych, przy czym r jest liczbą normalną, jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1 + \dots + r_n}{n} = \frac{1}{2},$$

(tutaj r_i jest i -tą cyfrą nieskończonego rozwinięcia dwójkowego r). Uzasadnij, że N jest zbiorem borelowskim.

Trudniejsze zadania:

Zad. 7 Posłuż się twierdzeniem Baire'a, żeby udowodnić następujące twierdzenie: jeżeli $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką (tzn. pochodne wszystkich rzędów f są ciągłe) taką, że dla każdego $x \in [0, 1]$ istnieje n takie, że $f^{(n)}(x) = 0$, to f jest wielomianem. (Wskazówka: niech $S_n = \{x : f^{(n)} = 0\}$ i $X = \{x : \exists(a, b) \ni x, f \text{ nie jest wielomianem na } (a, b)\}$. Z faktu, że $[0, 1] = \bigcup_n S_n$ wywnioskuj, że S_m zawiera przedział dla pewnego m .)