Dowód ciągłości h^{-1}.

$h^{-1}: h[X] \to X$.

Żeby pokazać ciągłość musimy sprawdzić, że

$h[U]$ jest otwarty w $h[X]$ dla każdego otwartego $U \subseteq X$.

(bo $(h^{-1})^{-1}[U] = h[U]$).

Niech U - otwarty w X.

Rozważmy $y \in U$. Pokażemy, że istnieje zbiór bazowy B t, że $y \in B \subseteq h[U]$

To zakończy dowód, bo będzie oznaczać, że $h[U]$ jest sumą zbiorów bazowych.

Zbiór B będzie postaci $(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \times [0,1] \times [0,1] \times \ldots) \cap h[X]$,

gdzie $U_1, \ldots, U_n$ - otwarte podzbiory $[0,1]$.

Ponieważ $y \in h[U]$, to istnieje $x \in U$ t, że $y = h(x)$.

Ponieważ U - otwarty, to istnieje $r > 0$ t, że $B_r(x) \subseteq U$.

Z gęstości zbioru A mamy, że istnieje k t, że $a_k \in B_{r/3}(x)$.

$$B = \left([0,1] \times \ldots \times [0,1] \times \underset{\uparrow \text{ k-ta współrzędna}}{[0, d(x, a_k) + r/3)} \times [0,1] \times \ldots\right) \cap h[X].$$

① $y \in B$, bo k-ta współrzędna y to $d(x, a_k)$.

② $B \subseteq h[U]$

Istotnie, jeśli $y' \in B$ to istnieje $x' \in X$ $y' = h(x')$.

Skoro $h(x') \in B$, to $d(x', a_k) < d(x, a_k) + r/3$.

Wtedy $d(x', x) \leq d(x', a_k) + d(a_k, x) < d(x, a_k) \cdot 2 + r/3 <$

$< r/3 \cdot 2 + r/3 = r$.

Czyli $x' \in B_r(x) \subseteq U$, a więc $y' \in h[U]$ ■