

---

## Kolokwium 1 - Topologia 2026

---

**Zad. 1** (3) Znajdź wnętrze i domknięcie zbioru  $A$  w przestrzeni  $X$  w poniższych przypadkach. W punktach c) i d) podaj krótkie uzasadnienie.

a)  $A = \mathbb{N}$ ,  $X = \mathbb{Q}$  z metryką euklidesową.

b)  $A = (0, 1) \times [0, 1)$ ,  $X = (0, 1] \times [0, 1]$  z metryką euklidesową.

c)  $A = \{f \in C[0, 1] : f \text{ jest stała na pewnym przedziale}\}$ ,  $X = C[0, 1]$ .

d)  $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ .

**Zad. 2** (2) Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $d': X \times X \rightarrow [0, \infty)$  będzie dane wzorem  $d'(x, y) = d(x, y)$ , gdy  $d(x, y) \leq 1$  i  $d'(x, y) = 1$  w przeciwnym wypadku. Pokaż, że  $(X, d)$  i  $(X, d')$  są homeomorficzne.

**Zad. 3** (2) Zbadaj (podając krótkie uzasadnienia), czy istnieje ciągła surjekcja  $f: X \rightarrow Y$ , jeżeli

a)  $X$  jest okręgiem o promieniu 1 i środku  $\langle 0, 0 \rangle$  z metryką euklidesową,  $Y$  jest takimż okręgiem z metryką centrum,

b)  $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ ,  $Y$  jest brzegiem kwadratu na płaszczyźnie euklidesowej,

c)  $X = \mathbb{R}$  z topologią strzałki,  $Y = \mathbb{R}$  z topologią euklidesową.

d)  $X = \text{KOT}$ ,  $Y = \text{PIES}$ , jako podzbiory płaszczyzny z metryką euklidesową.

**Zad. 4** (2) Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną (oczywiście, Hausdorffa). Niech  $K \subseteq X$  będzie zwarty i  $x \in X \setminus K$ . Pokaż, że istnieją otwarte rozłączne zbiory  $U, V$  takie, że  $K \subseteq U$  i  $x \in V$ .

**Zad. 5** (3) Przestrzenią pierwszomajową nazywamy zbiór  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\text{goździk}\}$  z następującą topologią:

- otoczeniami bazowymi punktów  $\langle n, m \rangle$  są zbiory  $\{\langle n, m \rangle\}$ ,
- otoczeniami goździka są zbiory  $\{\text{goździk}\} \cup A$ , przy czym dla każdej kolumny  $m$  zbiór  $\{n: \langle m, n \rangle \notin A\}$  jest skończony.

Czy przestrzeń pierwszomajowa jest Hausdorffa? Czy jest spójna? Czy jest ośrodkowa? Zwarta? Metryzowalna?