
Kolokwium 1 - Topologia 2025

Zad. 1 (3) Znajdź wnętrze i domknięcie zbioru A w przestrzeni X , jeśli

a) $A = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$ z metryką euklidesową.

b) $A = (0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $X = (0, 2) \cap \mathbb{Q}$ z metryką euklidesową.

c) $A = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$, $X = C[0, 1]$.

d) $A = \{f \in C[0, 1] : f(x) = 0 \text{ dla pewnego } x \in [0, 1]\}$, $X = C[0, 1]$.

Zad. 2 (2) Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Dla podzbioru $A \subseteq X$ definiujemy $\heartsuit(A) = \text{Int}(\overline{A})$ (słownie: *serce A to wnętrze domknięcia A*).

a) Pokaż, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq X$ mamy $\heartsuit(\heartsuit(A)) = \heartsuit(A)$.

b) W $X = \mathbb{R}$ z topologią euklidesową znajdź otwarty zbiór A dla którego $\heartsuit(A) \neq A$.

Zad. 3 (2) Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną. Na iloczynie kartezjańskim $Y = X \times X$ zadajemy metrykę d_Y wzorem

$$d_Y((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_X(y, y')$$

a) Pokaż, że rzutowanie $\pi: Y \rightarrow X$ dane wzorem $\pi(x, y) = x$ jest funkcją ciągłą.

b) Pokaż, że funkcja $\Delta: X \rightarrow X \times X$ dana wzorem $\Delta(x) = \langle x, x \rangle$ jest homeomorfizmem na swój obraz.

c) Udowodnij, że X jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest przestrzenią zwartą.

Zad. 4 (2) Załóżmy, że X jest przestrzenią Hausdorffa i rozważmy $Y = X \times X$ z topologią produktową (tzn. generowaną przez zbiory postaci $U \times V$, U, V - otwarte). Pokaż, że zbiór $\{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ jest domknięty w Y .

Zad. 5 (3) Płaszczyzna z szyszką to zbiór $X = \mathbb{R}^2 \cup \{s\}$ wyposażony w następującą topologię. Jeżeli $U \subseteq \mathbb{R}^2$, to U jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest otwarty w metryce euklidesowej. Jeżeli szyszka (czyli s) należy do U , to U jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{R}^2 \setminus U$ jest zwarty w metryce euklidesowej.

a) Czy płaszczyzna z szyszką jest ośrodkowa?

b) Czy płaszczyzna z szyszką jest zwarta?

c) Podaj przykład nietrywialnego ciągu zbieżnego do szyszki.