
Lista przedkolokwialna - Topologia 2024

Kolokwium odbędzie się w **środe 24 kwietnia**. Rozpocznie się o 8:30 i potrwa 60 minut. W jego zakres wejdą listy 1–6. Poniżej parę przykładowych zadań.

Zad. 1 Znajdź wnętrze i domknięcie zbioru $\{f \in C[0, 1]: \exists x \in [0, 1] f(x) > 0\}$ w poniższych przestrzeniach podając uzasadnienia.

- a) $C[0, 1]$ z metryką supremum
- b) $C[0, 1]$ z metryką całkową,
- c) $C[0, 1]$ z topologią zbieżności punktowej.

Zad. 2 Rozważmy \mathbb{R}^2 z topologią, w której bazą są zbiory postaci $K_r(x, y - r) \cup \{(x, y)\}$, gdzie $K_r(s, t)$ oznacza koło bez brzegu o promieniu r i środku w punkcie $\langle s, t \rangle$ (czyli po prostu koła bez brzegu z dodanym punktem w „biegunie północnym”). Niech $X = [-1, 1]^2$ będzie podprzestrzenią \mathbb{R}^2 z powyższą topologią.

- a) Czy X jest Hausdorffa?
- b) Dla których $a \in \mathbb{R}$ ciąg $(\langle \frac{1}{n}, \frac{a}{n} \rangle)$ jest zbieżny?
- c) Czy X jest zwarta?
- d) Znajdź wnętrze i domknięcie $K_1(0, 0)$ w X .

Zad. 3 Rozważmy kostkę Hilberta $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Odpowiedz na poniższe pytania uzasadniając odpowiedzi. Niech $C \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$ będzie podprzestrzenią złożoną ze wszystkich ciągów zbieżnych.

- Znajdź wnętrze i domknięcie C jako podzbioru $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
- Czy C jest zwarta?
- Czy C jest ośrodkowa?

Zad. 4 Niech X będzie przestrzenią topologiczną (Hausdorffa) i niech $A \subseteq X$. Czy $\text{Bd}(A)$ musi mieć puste wnętrze? Odpowiedz na to pytanie przy dodatkowych założeniach na zbiór A :

- A jest dowolnym podzbiorem X ,
- A jest otwartym podzbiorem X ,
- A nie jest gęstym podzbiorem żadnej podprzestrzeni $U \subseteq X$, przy czym U (jako podzbiór) jest otwarta w X .

Zad. 5 Niech S^1 będzie okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie. Pokaż, że istnieją przekształcenia ciągłe i „na” $f: S^1 \rightarrow [0, 1]$ i $g: [0, 1] \rightarrow S^1$. Pokaż, że nie istnieje homeomorfizm między S^1 i $[0, 1]$. (Uwaga, na to ostatnie pytanie można łatwo odpowiedzieć używając twierdzeń z zakresu, który nie będzie obowiązywał na kolokwium.)