Lista 0 - Topologia 2024

Zad. 1 Spróbuj opis kule i ciągi zbieżne w wybranych przestrzeniach metrycznych.

Zad. 2 Niech X będzie przestrzenią liniową. *Normą* na X nazywamy funkcję, która uogólnia pojęcie długości wektora w analogiczny sposób, w jaki metryka uogólnia pojęcie odległości punktów. Spróbuj sformalizować tę definicję. Pokaż, że każda norma generuje w naturalny sposób metrykę, ale nie każda metryka (określona na przestrzeni liniowej) może zostać wygenerowana przez normę.

Zad. 3 Pokaż, że ciąg (x_n) w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z ciągów $x_n(i)$ dla $i < k$ jest zbieżny (w $\mathbb{R}$).

Zad. 4 Udowodnij, że ciąg (x_n) punktów płaszczyzny jest zbieżny do x w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w metryce maksimum.

Zad. 5 Uzasadnij, że nie istnieje ciąg (x_n) elementów $\mathbb{R}^2$, który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej. Podaj przykład ciągu, który jest zbieżny w metryce euklidesowej (na $\mathbb{R}^2$), ale nie jest w metryce centrum.

Zad. 6 Wykaż, że zbieżność jednostajna ciągu funkcji ciągłych na $[0, 1]$ jest równoważna zbieżności w metryce supremum w $C[0, 1]$. (Ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do f, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in [0, 1] \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.)$$

Zad. 7 Pokaż, że w kostce Cantora wszystkie trójkąty są równoramienne.