Lista 1 - Topologia 2024

Zad. 1 Sprawdź, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X,d) sfera, a więc zbiór postaci $\{y \in X\colon d(x,y) = r\}$ (dla ustalonego $x \in X$ i $r > 0$) jest zbiorem domkniętym. Pokaż, we $\overline{B_r(x)} \subseteq \{y\colon d(x,y) \leq r\}$, ale niekoniecznie musi zachodzić przeciwna inkluzja.

Zad. 2 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ są otwarte, a $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ są domknięte.

Definicja. Niech X, d będzie przestrzenią metryczną i $A \subseteq X$. Wtedy

- *wnętrzem* zbioru A nazywamy $\mathrm{Int}(A) = \{x \in A\colon \exists r > 0\ B_r(x) \subseteq A\}$,
- *domknięciem* zbioru A nazywamy $\overline{A} = \{x \in X\colon \exists (x_n)\ \forall n\ x_n \in A \wedge \lim x_n = x\}$,
- *brzegiem* zbioru A nazywamy $\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Zad. 3 Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subseteq X$. Pokaż, że $\mathrm{Int}(A)$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w A, a $\overline{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A. Wywnioskuj, że U jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy $U = \mathrm{Int}(U)$, a F jest zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{F} = F$.

Zad. 4 Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Pokaż, że dla każdego $A, B \subseteq X$ zachodzą równości i inkluzje (w przypadku inkluzji właściwych pokaż, że nie muszą zachodzić inkluzje odwrotne):

$$\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A},$$
$$\mathrm{Bd}(A \cup B) = \mathrm{Bd}(A) \cup \mathrm{Bd}(B) \qquad \mathrm{Bd}(A) = \mathrm{Bd}(X \setminus A).$$

Zad. 5 Znajdź wnętrze, domknięcie (i brzeg) następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową.

$$\mathbb{R}\times\mathbb{N},\quad \{\langle x,y\rangle\colon x^2+y^2=1\},\quad \mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\quad \{\langle x,y\rangle\colon y=2x\},\quad \{\langle x,y\rangle \in (0,\infty)^2\colon y = \sin 1/x\}$$

Powtórz polecanie dla metryki maksimum i metryki centrum.

Zad. 6 Znajdź wnętrze i domknięcie poniższych zbiorów w przestrzeni $C[0,1]$ (z metryką supremum):

a) $\{f \in C[0,1]\colon f(0) < 2\}$,

b) $\{fC[0,1]\colon f \text{ jest ściśle rosnąca}\}$.

Zad. 7 Czy istnieje metryka na $\mathbb{R}^2$ taka, że $[0,1]\times[0,1]$ jest kulą (w tej metryce)?

Zadania rekreacyjne i problemy

Zad. 8 Metrykę można definiować na każdym zbiorze, w ostateczności dyskretną... Spróbuj wymyślić jakieś *niedyskretne* metryki (lub pseudometryki, patrz niżej) na X, jeżeli X jest ...

- pewnym grafem spójnym skończonym,
- pewnym grafem spójnym nieskończonym,
- pewnym grafem niespójnym,
- zbiorem słów w języku polskim,
- rodziną wszystkich wielokątów na płaszczyźnie,
- pewną rodziną przestrzeni metrycznych (czemu nie?).

Pseudometryka jest funkcją, która spełnia wszystkie warunki metryki poza tym, że mogą się zdarzyć różne punkty x, y takie, że $d(x, y) = 0$.

Zad. 9 W przestrzeniach metrycznych można zdefiniować prostą (jako zbiór tych punktów, które są równoodległe od dwóch ustalonych punktów). Proste nie muszą wyglądać jak „proste“ (patrz np. metryka dyskretna). Jak wyglądają proste w normie miejskiej? Maksimum? Jak wygląda prosta w przestrzeni $C[0, 1]$ z metryką supremum? Jakie inne geometryczne obiekty znane z przestrzeni euklidesowych potrafisz uogólnić na inne przestrzenie metryczne? A jakich się nie da?