
Lista 1 - Topologia 2025

Zad. 1 Zbadaj jak wyglądają ciągi zbieżne w kostce Cantora.

Zad. 2 Na przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$ możemy zdefiniować metrykę

$$d_c(f,g) = \int |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Te osoby, które jeszcze nie całkują, mogą myśleć, że $d(f,g)$ jest polem między wykresami funkcji f i g.

a) Pokaż, że $d_c(f,g) \leq d_{sup}(f,g)$ dla dowolnych funkcji f i g,

b) Pokaż, że dla dowolnie dużego r istnieje f, g takie, że $d_c(f,g) < 1$ i $d_{sup}(f,g) > r$.

c) Wywnioskuj, że zbieżność ciagu funkcyjnego w metryce supremum pociąga zbieżność w metryce całkowej, ale nie odwrotnie.

d) Spróbuj zwizualizować sobie kulę w metryce całkowej.

Definicja. Niech X, d będzie przestrzenią metryczną i $A \subseteq X$. Wtedy

- *wnętrzem* zbioru A nazywamy $\mathrm{Int}(A) = \{x \in A\colon \exists r > 0\ B_r(x) \subseteq A\}$,
- *domknięciem* zbioru A nazywamy $\overline{A} = \{x \in X\colon \exists (x_n)\ \forall n\ x_n \in A \wedge \lim x_n = x\}$,
- *brzegiem* zbioru A nazywamy $\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Zad. 3 Znajdź wnętrze, domknięcie (i brzeg) następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową.

$$\mathbb{R}\times\mathbb{N}, \quad \{\langle x,y\rangle\colon x^2+y^2=1\}, \quad \mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}), \quad \{\langle x,y\rangle\colon y=2x\}, \quad \{\langle x,y\rangle \in (0,\infty)^2\colon y = \sin 1/x\}$$

Powtórz polecanie dla metryki maksimum i metryki centrum.

Zad. 4 Znajdź wnętrze i domknięcie poniższych zbiorów w przestrzeni $C[0,1]$ (z metryką supremum):

a) $\{f \in C[0,1]\colon f(0) < 2\}$,

b) $\{fC[0,1]\colon f \text{ jest ściśle rosnąca}\}$.

Definicja. Zbiór $U \subseteq X$ jest zbiorem *otwartym*, jeżeli dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$ takie, że $B_r(x) \subseteq U$. Zbiór F jest zbiorem *domkniętym*, jeżeli granica każdego zbieżnego ciągu elementów F jest elementem F.

Zad. 5 Podaj przykłady zbiorów otwartych i zbiorów domkniętych w różnych przestrzeniach metrycznych. Czy zawsze istnieje zbiór, który nie jest ani otwarty ani domknięty? Czy mogą istnieć zbiory, które są zarówno otwarte jak i domknięte?

Zad. 6 Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subseteq X$. Pokaż, że $\mathrm{Int}(A)$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w A, a $\overline{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A. Wywnioskuj, że U jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy $U = \mathrm{Int}(U)$, a F jest zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{F} = F$.

Zad. 7 Sprawdź, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) sfera, a więc zbiór postaci $\{y \in X \colon d(x, y) = r\}$ (dla ustalonego $x \in X$ i $r > 0$) jest zbiorem domkniętym. Pokaż, we $\overline{B_r(x)} \subseteq \{y \colon d(x, y) \leq r\}$, ale niekoniecznie musi zachodzić przeciwna inkluzja.

Zad. 8 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ są otwarte, a $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ są domknięte.