Lista 2 - Topologia 2024

Definicja. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ jest bazą tej przestrzeni, jeżeli każdy zbiór otwarty (czyli element $\mathcal{T}$) jest sumą pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$. (Np. w przestrzeniach metrycznych rodziny kul stanowią bazy.).

Zad. 1 Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi i niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni Y. Pokaż, że następujące warunki są równoważne ciągłości funkcji $f\colon X \to Y$:

a) $f^{-1}[F]$ jest domknięty dla każdego domkniętego $F \subseteq Y$,

b) $f^{-1}[B]$ jest otwarty dla każdego $B \in \mathcal{B}$.

Wywnioskuj, że aby sprawdzić ciągłość funkcji $f\colon X \to Y$, gdy Y jest przestrzenią metryczną, wystarczy sprawdzać otwartość przeciwobrazów kul.

Zad. 2 Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $\mathcal{B}$ będzie bazą topologii. Pokaż, że ciąg (x_n) elementów X jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $U \in \mathcal{B}$ od pewnego momentu wszystkie wyrazy (x_n) należą do U.

Zad. 3 Pokaż, że okrąg bez punktu jest homeomorficzny z prostą euklidesową. Uogólnij ten wynik na wyższe wymiary.

Zad. 4 Które przekształcenia liniowe są homeomorfizmami? Które są funkcjami ciągłymi?

Zad. 5 Rozważmy $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową. Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że

a) funkcja f jest ciągła, ale istnieje zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}$ taki, że obraz $f[U]$ nie jest otwarty,

b) dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}$ obraz $f[U]$ jest otwarty, ale funkcja f nie jest ciągła.

Zad. 6 Pokaż, że w przestrzeni Hausdorffa punkty są domknięte, a ciągi zbieżne mają tylko jedną granicę.

Zad. 7 Rozważmy rodzinę $\mathcal{P} = \{[a, b) \subseteq \mathbb{R}\colon a < b\}$. Niech $\mathcal{T}$ będzie najmniejszą rodziną zawierającą $\mathcal{P}$ i będacą topologią. Wtedy $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ jest przestrzenią topologiczną zwaną strzałką.

a) Pokaż, że dla każdego $x \in U \in \mathcal{T}$ istnieją $a < b \in \mathbb{R}$ takie, że $x \in [a, b) \subseteq U$. Wywnioskuj, że $\mathcal{P}$ jest bazą strzałki.

b) Pokaż, że $[0, 1)$ jest zbiorem domkniętym w topologii strzałki.

c) Pokaż, że $(0, 1)$ jest zbiorem otwartym w topologii strzałki. Wywnioskuj, że topologia strzałki jest *bogatsza* od topologii euklidesowej (tzn. $\mathcal{T}$ zawiera wszystkie zbiory otwarte w sensie metryki euklidesowej).

d) Pokaż, że $(0, 1)$ nie jest zbiorem domkniętym w topologii strzałki.