Lista 3 - Topologia 2024

Zad. 1 Ustalmy X i topologię $\mathcal{T}$ na X. Pokaż, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ i dla każdego zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in B \subseteq U$.

Zad. 2 Rozważmy zbiór X i rodzinę $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, która zawiera (jako elementy) $\emptyset$ i X i jest zamknięta na skończone przekroje. Pokaż, że rodzina wszystkich sum elementów $\mathcal{A}$ jest topologią.

Zad. 3 Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że rodzina $\mathcal{B}$ jest *podbazą* topologii $\mathcal{T}$, jeżeli rodzina skończonych przekrojów elementów $\mathcal{A}$ jest bazą $\mathcal{T}$. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że każda rodzina (zawierająca jako elementy $\emptyset$ i X) jest podbazą pewnej topologii.

Zad. 4 Pokaż, że przestrzeń $C_p([0,1])$, funkcji ciągłych $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ z topologią zbieżności punktowej, jest Hausdorffa. Pokaż, że nie jest metryzowalna. Jak się ma topologia $C_p([0,1])$ do topologii indukowanej przez metrykę supremum?

Zad. 5 Pokaż, że podprzestrzenie przestrzeni Hausdorffa są przestrzeniami Hausdorffa.

Zad. 6 Udowodnij, że kostka Cantora jest podprzestrzenią (topologiczną) kostki Hilberta.