Lista 3 - Topologia 2024

Definicja. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ jest bazą tej przestrzeni, jeżeli każdy zbiór otwarty (czyli element $\mathcal{T}$) jest sumą pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$. (Np. w przestrzeniach metrycznych rodziny kul stanowią bazy.).

Zad. 1 Pokaż, że strzałka jest przestrzenią Hausdorffa.

Zad. 2 Pokaż, że zbiory postaci $[a, b)$ jest domknięte w topologii strzałki. Pokaż, że zbiory postaci (a, b) są otwarte, ale nie są domknięte w topologii strzałki.

Zad. 3 Pokaż, że w przestrzeni Hausdorffa punkty są domknięte, a ciągi zbieżne mają tylko jedną granicę.

Zad. 4 Ustalmy X i topologię $\mathcal{T}$ na X. Pokaż, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ i dla każdego zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in B \subseteq U$.

Zad. 5 Rozważmy zbiór X i rodzinę $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, która zawiera (jako elementy) $\emptyset$ i X i jest zamknięta na skończone przekroje. Pokaż, że rodzina wszystkich sum elementów $\mathcal{A}$ jest topologią.

Zad. 6 Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że rodzina $\mathcal{B}$ jest *podbazą* topologii $\mathcal{T}$, jeżeli rodzina skończonych przekrojów elementów $\mathcal{A}$ jest bazą $\mathcal{T}$. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że każda rodzina (zawierająca jako elementy $\emptyset$ i X) jest podbazą pewnej topologii.

Zad. 7 Jak się ma topologia przestrzeni $C_p([0, 1])$, funkcji ciągłych $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ z topologią zbieżności punktowej, do topologii indukowanej przez metrykę supremum?

Zad. 8 Pokaż, że podprzestrzenie przestrzeni Hausdorffa są przestrzeniami Hausdorffa.

Zad. 9 Pokaż, że przestrzeń $C_p([0, 1])$ nie jest metryzowalna.

Zad. 10 Pokaż, że zbiory postaci $\{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\colon x(n) = i\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $i \in \{0, 1\}$, stanowią podbazę kostki Cantora $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.