Lista 4 - Topologia 2024

Zad. 1 Pokaż, że zbiór $A \subseteq X$ jest gęsty w przestrzeni metrycznej (X, d) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $x \in X$ istnieje $a \in A$ taki, że $d(x, a) < \varepsilon$.

Zad. 2 Pokaż, że podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest ośrodkowa.

Zad. 3 Pokaż, że zbiory postaci

$$U_1 \times U_2 \times .. \times U_n \times [0,1] \times [0,1] \times \dots,$$

przy czym $n \in \mathbb{N}$, a U_i są otwartymi podzbiorami $[0,1]$ dla $i \leq n$, stanowią bazę kostki Hilberta. Zauważ, że ta teza będzie prawdziwa również, gdy założymy dodatkowo, że U_i sa postaci $(a_i, b_i) \cap [0,1]$ dla $a_i < b_i \in \mathbb{R}$.

Zad. 4 Udowodnij, że przestrzeń $C[0,1]$ jest ośrodkowa (korzystając z twierdzenia Weierstrassa mówiącego o tym, że zbiór wielomianów jest gęsty w $C[0,1]$).

Zad. 5 Powiemy, że przestrzeń (X, d) jest *całkowicie ograniczona*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ε-sieć, a więc zbiór skończony F o własności:

$$\forall x \in X \ \exists y \in F \ d(x, y) < \varepsilon.$$

Pokaż, że przestrzenie całkowicie ograniczone są ośrodkowe, lecz niekoniecznie na odwrót. Pokaż, że przestrzenie całkowicie ograniczone są ograniczone, ale niekoniecznie na odwrót. (Przestrzeń jest ograniczona, jeżeli istnieje C takie, że $d(x, y) < C$ dla każdych $x, y \in X$).

Zad. 6 ($\star$) Podaj przykład metryki d na $\mathbb{R}^2$ takiej, że $(\mathbb{R}^2, d)$ jest ośrodkowa, ale $\mathbb{Q}^2$ nie jest w niej zbiorem gęstym.