Lista 5 - Topologia 2024

Zad. 1 Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa. Pokaż, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni X jest zbieżny do x wtedy i tylko wtedy, kiedy wszystkie jego podciągi są zbieżne do x.

Zad. 2 Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa. O rodzinie $\mathcal{A}$ podzbiorów X powiemy, że jest *scentrowana*, jeżeli przekrój każdej skończonej podrodziny $\mathcal{A}$ jest niepusty. Udowodnij, że X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda rodzina scentrowana domkniętych podzbiorów X ma niepusty przekrój.

Zad. 3 Przypomnijmy (z poprzedniej listy), że przestrzeń (X, d) jest *całkowicie ograniczona*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ε-sieć, a więc zbiór skończony F o własności:

$$\forall x \in X \ \exists y \in F \ d(x, y) < \varepsilon.$$

Pokaż, że przestrzenie zwarte metryczne są całkowicie ograniczone. Wywnioskuj (z powyższego i z zadania z poprzedniej listy), że każda przestrzeń metryczna zwarta jest ośrodkowa. Podaj przykład przestrzeni, która jest całkowicie ograniczona, ale nie jest zwarta.

Zad. 4 Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi i niech funkcja $f\colon X \to Y$ będzie ciągła i „na". Pokaż, że jeśli X jest zwarta, to Y również.

Zad. 5 Sprawdź, czy poniższe przestrzenie są zwarte:

- $C[0, 1]$ z metryką supremum,
- przestrzeń z gruszką,
- $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ z metryką centrum,
- strzałka,
- $\{f \in C[0, 1] \colon \forall x \in [0, 1] \ |f(x)| \leq 1\}$ z metryką supremum.

Zad. 6 ($\star$) Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią metryczną, w której każdy ciąg ma podciąg zbieżny, to X jest zwarta. (Uwaga. Na wykładzie udowodniliśmy tylko, że w takiej sytuacji każde *przeliczalne* pokrycie ma podpokrycie skończone).

Zad. 7 ($\star$) Rozważmy zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów liczb naturalnych z metryką

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \ \text{gdy } x = y, \\ 1/2^{\min\{n\colon x(n) \neq y(n)\}}, \ \text{gdy } x \neq y. \end{cases}$$

Udowodnij, że ta przestrzeń jest *bardzo niezwarta*, tzn. nie jest nawet przeliczalną sumą zbiorów zwartych.

Zad. 8 ($\star$) (Dla tych, co wiedzą, co to jest ω_1.) Rozważmy przestrzeń $\omega_1 + 1$ z topologią *porządkową*, tzn. generowaną przez zbiory postaci (α, β), $[0, \beta)$ i $(\alpha, \omega_1]$, przy czym $(\alpha, \beta) = \{\gamma\colon \alpha < \gamma < \beta\}$, itd. Pokaż, że zbiór $A = [0, \omega_1)$ nie jest domknięty w tej przestrzeni, ale każdy ciąg zbieżny elementów A ma granicę w A. (Oczywiście to oznacza, że $\omega_1 + 1$ z topologią porządkową nie jest metryzowalna).