Lista 6 - Topologia 2024

Zad. 1 Pokaż, że rzut zbioru zwartego $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zwarty. Czy rzut zbioru domkniętego $A \subseteq \mathbb{R}^2$ musi być domknięty?

Zad. 2 Funkcja $f : (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \to Y$, $f(x) = \frac{1}{x} + \left[\frac{1}{x}\right]$ jest homeomorfizmem. Znajdź Y.

Zad. 3 Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d) i jej podzbiór A. Zdefiniujmy odległość punktu od A w następujący sposób

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}.$$

Pokaż, że jeśli A jest zwarty, to ta odległość jest realizowana, tzn. istnieje $a \in A$ taki, że $d(x, A) = d(x, a)$.

Zad. 4 Przez *cząstki* zbioru Cantora rozumiemy to, co się samo powinno przez to rozumieć, tzn. zbiory postaci

$$[0, \frac{1}{3}] \cap C, [\frac{2}{3}, 1] \cap C, [0, \frac{1}{9}] \cap C, [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cap C, \ldots$$

Pokaż, że cząstki stanowią bazę zbioru Cantora.

Zad. 5 Udowodnij bezpośrednio, że funkcja $h \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ zdefiniowana na wykładzie jest ciągła (nie używając ciągłości funkcji odwrotnej i twierdzenia o automatycznej ciągłości).

Zad. 6 Czy $f \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$ jest ciągła? Czy jest '1-1'? (Znajdź jej obraz.)

Zad. 7 Udowodnij, że kostka Hilberta jest zwarta. Wskazówka: podążaj za dowodem, że kostka skończenie wymiarowa $[0,1] \times \cdots \times [0,1]$ jest zwarta (tylko się nie zatrzymuj).

Zad. 8 ($\star$) Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ z metryką centrum. Uzupełnij: A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest domknięty, ograniczony i ...

Zad. 9 ($\star$) Udowodnij, że zbiór Cantora zawiera nieprzeliczalnie wiele (!) parami rozłącznych homeomorficznych kopii zbioru Cantora. Czy potrafisz znaleźć inne przestrzenie o tej własności?