Lista 7 - Topologia 2024

Zad. 1 Niech $h\colon X \to Y$ będzie homeomorfizmem i niech $A \subseteq X$. Pokaż, że $h_{|A}\colon A \to h[A]$ jest homeomorfizmem.

Zad. 2 Wywnioskuj z powyższego, że jeśli przestrzenie spójne X i Y są homeomorficzne oraz X zawiera punkt rozspajający na n składowych, to Y również zawiera punkt rozspajający na n składowych.

Zad. 3 Zbadaj, które litery alfabetu są ze sobą homeomorficzne (używaj prostego kroju i zbadaj tylko te bardziej interesujące przypadki, np. parę A i P).

Zad. 4 Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem przeliczalnym. Pokaż, że $\mathbb{R}^2 \setminus A$ jest przestrzenią spójną.

Zad. 5 Które z poniższych przestrzeni są spójne? Tym, które nie są spójne, zbadaj składowe.

a) $\mathbb{Q}$,

b) strzałka,

c) kostka Hilberta $[0,1]^{\mathbb{N}}$,

d) $\mathbb{R}^2$ z metryką centrum. $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$ z metryką centrum.

e) przestrzeń $C_p([0,1])$,

f) zbiór funkcji wielomianowych $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ o współczynnikach wymiernych, z metryką supremum,

Zad. 6 Czy X jest homeomorficzne z Y, jeśli

a) $X = [0,1]$, $Y = \{\langle x,y\rangle \colon x^2 + y^2 = 1\}$,

b) $X = (0,3) \setminus \{1,2\}$, $Y = [0,3] \setminus \{1,2\}$,

c) $X = [0,3) \setminus \{1,2\}$, $Y = [0,1] \cup [2,3) \cup (4,5)$,

d) $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{N}$,

e) $X = [0,1]^2$, $Y = [0,1]^2 \setminus (0,1)^2$.

Zad. 7 ($\star$) Dla par z powyższego zadania zbadaj istnienie ciągłych surjekcji $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$.

Zad. 8 Powiemy, że przestrzeń topologiczna jest *lokalnie spójna*, jeśli posiada bazę złożoną ze zbiorów spójnych. Pokaż, że nie każda przestrzeń lokalnie spójna jest spójna. Znajdź przykład przestrzeni spójnej, która nie jest lokalnie spójna.

Zad. 9 ($\star\star$) Skonstruuj nieskończoną przestrzeń $A \subseteq \mathbb{R}^2$ taką, że jedynym homeomorfizmem $h\colon A \to A$ jest identyczność.