Lista 7 - Topologia 2026

Zad. 1 Pokaż, że produkt $X \times Y$ jest spójny, jeśli X i Y są spójne.

Zad. 2 Pokaż, że przestrzeń $C_p([0,1])$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^{[0,1]}$ z topologią produktową.

Zad. 3 Niech X będzie przestrzenią normalną, a $A \subseteq X$ będzie domknięty. Pokaż, że każdą funkcję ciągłą $f \colon A \to [a,b] \times [c,d]$ da się przedłużyć do funkcji ciągłej na całym X. Wskazówka: użyj twierdzenia Tietzego.

Zad. 4 Pokaż, że koprodukt przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

Zad. 5 Pokaż, że przestrzeń topologiczna jest spójna wtedy i tylko wtedy, kiedy nie jest nietrywialnym koproduktem dwóch przestrzeni.

Zad. 6 Pokaż, że jeżeli dla każdego $i \in I$ przestrzeń X_i jest homeomorficzna z X, to koprodukt $\coprod_{i \in I} X_i$ jest homeomorficzny z $X \times I$, przy czym na I rozważamy topologię dyskretną.

Zad. 7 Rozważmy zbiór nieprzeliczalny I. Niech $X = \coprod_{i \in I}[0,1]$ i niech $\sim$ będzie relacją równoważności na X taką, że $\langle 0, i \rangle \sim \langle 0, j \rangle$ dla każdego $i, j \in I$. *Dużym jeżem* nazywamy przestrzeń $X_{/\sim}$ (im większe I, tym większy jeż). Pokaż, że X jest metryzowalny, ale duży jeż nie jest. Wskazówka: rozważ bazę w punkcie *sklejenia*.

Zad. 8 Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $[0,1]^2$. Postaraj się opisać $[0,1]^2_{/\sim}$ w poniższych przypadkach. Które z nich sa homeomorficzne z podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$? (Uwaga, w poniższych definicjach uwzględnione zostały tylko nietrywialne warunki, tzn. te, które nie wynikają z definicji relacji równoważności).

a) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $x = y'$ i $x' = y$,

b) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $y = y' = 0$,

c) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \notin (0,1)^2$,

d) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle\}$,

e) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\max(x,y) = \max(x',y')$,

Zad. 9 ($\star$) Czy wstęga Möbiusa jest homeomorficzna z $S^1 \times [0,1]$?

Zad. 10 (zadanie Lesiczki) Udowodnij, że dla $n \geq 2$ nie istnieje funkcja otwarto-domknięta z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$.

Zad. 11 ($\star$) Pokaż, że produkt strzałek nie jest przestrzenią normalną (choć jest Hausdorffa).