
Lista 8 - Topologia 2025

- Zad. 1** Pokaż, że jeśli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to jest zbieżny.
- Zad. 2** Podaj przykład przestrzeni spójnej, zupełnej i nieośrodkowej.
- Zad. 3** Pokaż, że przestrzenie zupełne, które są całkowicie ograniczone, są zwarte.
- Zad. 4** Udowodnij, że jeżeli w przestrzeni X każdy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych o średnicach malejących do 0 ma niepusty przekrój, to X jest zupełna.
- Zad. 5** Podaj przykład przestrzeni zupełnej i zstępującego ciągu zbiorów domkniętych o ograniczonych średnicach, który ma przekrój pusty.
- Zad. 6** Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $F \subseteq X$ jest domknięty, to U jest metryzowalny w sposób zupełny.
- Zad. 7** Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $U \subseteq X$ jest otwarty, to U jest metryzowalny w sposób zupełny. (Wskazówka: niech d będzie odpowiednią metryką na X . Rozważ metrykę daną wzorem

$$d'(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, (X \setminus U))} - \frac{1}{d(y, (X \setminus U))} \right|.$$

- Zad. 8** Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $G \subseteq X$ jest typu G_δ , to G jest metryzowalny w sposób zupełny. (Wskazówka: G jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych (U_n) . Dla każdego z tych zbiorów użyj poprzedniego zadania. Z przeliczalnie wielu metryk, które otrzymasz, złóż jedną metrykę.)
- Zad. 9** Pokaż, że w przestrzeni zupełnej przekrój przeliczalnie wielu zbiorów gęstych otwartych jest gęsty. (Wskazówka: twierdzenie Baire'a).
- Zad. 10** Rozważmy kostkę Hilberta $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ i zbiór $c_0 = \{(a_n) \in X : \lim a_n = 0\}$. Pokaż, że c_0 jest zbiorem borelowskim (oszacuj, jak wysoko jest w hierarchii zbiorów borelowskich).
- Zad. 11** $(\star)$ Niech $N \subseteq [0, 1]$ będzie zbiorem liczb normalnych, przy czym r jest liczbą normalną, jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1 + \dots + r_n}{n} = \frac{1}{2},$$

(tutaj r_i jest i -tą cyfrą nieskończonego rozwinięcia dwójkowego r). Uzasadnij, że N jest zbiorem borelowskim.

- Zad. 12** $(\star)$ Posłuż się twierdzeniem Baire'a, żeby udowodnić następujące twierdzenie: jeżeli $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką (tzn. pochodne wszystkich rzędów f są ciągłe) taką, że dla każdego $x \in [0, 1]$ istnieje n takie, że $f^{(n)}(x) = 0$, to f jest wielomianem. (Wskazówka: niech $S_n = \{x: f^{(n)} = 0\}$ i $X = \{x: \exists(a, b) \ni x, f \text{ nie jest wielomianem na } (a, b)\}$. Z faktu, że $[0, 1] = \bigcup_n S_n$ wywnioskuj, że S_m zawiera przedział dla pewnego m .)