Lista 9 - Topologia 2026

Zad. 1 Pokaż, że każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

Zad. 2 Pokaż, że jeśli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to jest zbieżny.

Zad. 3 Podaj przykład przestrzeni spójnej, zupełnej i nieośrodkowej.

Zad. 4 Udowodnij, że w twierdzeniu Baire'a wystarczy zakładać metryzowalność w sposób zupełny. Pokaż, że w twierdzeniu Cantora o zstępujacych rodzinach zbiorów domkniętych, metryzowalność w sposób zupełny nie wystarczy.

Zad. 5 Pokaż, że przestrzenie zupełne, które są całkowicie ograniczone, są zwarte.

Zad. 6 Udowodnij, że jeżeli w przestrzeni X każdy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych o średnicach malejących do 0 ma niepusty przekrój, to X jest zupełna.

Zad. 7 Pokaż, że w przestrzeni zupełnej przekrój przeliczalnie wielu zbiorów gęstych otwartych jest gęsty. (Wskazówka: twierdzenie Baire'a).

Zad. 8 Pokaż, że $\mathbb{Q}$ nie jest zbiorem typu G_δ. (Wskazówka: twierdzenie Baire'a).

Zad. 9 Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $F \subseteq X$ jest domknięty, to F jest metryzowalny w sposób zupełny.

Zad. 10 Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $U \subseteq X$ jest otwarty, to U jest metryzowalny w sposób zupełny. (Wskazówka: niech d będzie odpowiednią metryką na X. Rozważ metrykę daną wzorem

$$d'(x,y) = d(x,y) + |\frac{1}{d(x,(X \setminus U))} - \frac{1}{d(y,(X \setminus U))}|).$$

Zad. 11 Pokaż, że jeżeli X jest metryzowalna w sposób zupełny i $G \subseteq X$ jest typu G_δ, to G jest metryzowalny w sposób zupełny. (Wskazówka: G jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych (U_n). Dla każdego z tych zbiorów użyj poprzedniego zadania. Z przeliczalnie wielu metryk, które otrzymasz, złóż jedną metrykę.)

Zad. 12 ($\star$) Rozważmy kostkę Hilberta $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ i zbiór $c_0 = \{(a_n) \in X \colon \lim a_n = 0\}$. Pokaż, że c_0 jest zbiorem borelowskim (oszacuj, jak wysoko jest w hierarchii zbiorów borelowskich).

Zad. 13 ($\star$) Niech $N \subseteq [0,1]$ będzie zbiorem liczb normalnych, przy czym r jest liczbą normalną, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n} = \frac{1}{2},$$

(tutaj r_i jest i-tą cyfrą nieskończonego rozwinięcia dwójkowego r). Uzasadnij, że N jest zbiorem borelowskim.

Zad. 14 ($\star$) Posłuż się twierdzeniem Baire'a, żeby udowodnić następujące twierdzenie: jeżeli $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką (tzn. pochodne wszystkich rzędów f są ciągłe) taką, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje n takie, że $f^{(n)}(x) = 0$, to f jest wielomianem. (Wskazówka: niech $S_n = \{x \colon f^{(n)} = 0\}$ i $X = \{x \colon \exists (a,b) \ni x, f \text{ nie jest wielomianem na } (a,b)\}$. Z faktu, że $[0,1] = \bigcup_n S_n$ wywnioskuj, że S_m zawiera przedział dla pewnego m.)