Lista 10 (recyklingowo-powtórkowa) - Topologia 2026

Zad. 1 Rozważmy przestrzeń topologiczną X. Sprawdź, czy poniższe stwierdzenia zachodzą dla wszystkich $A, B \subseteq X$:

- $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$,
- $\bigcup_i \mathrm{Int}(A_i) \subseteq \mathrm{Int}(\bigcup_i A_i)$,
- $\mathrm{Bd}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Bd}(A) \cup \mathrm{Bd}(B)$,
- $\mathrm{Bd}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Bd}(A) \cup \mathrm{Bd}(B)$,
- $\mathrm{Bd}(A) = \mathrm{Bd}(A^c)$,
- $\mathrm{Bd}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{Bd}(A)$.

Zad. 2 Podaj przykład przestrzeni metrycznej, która nie jest spójna i nie jest zupełna, ale jest metryzowalna w sposób zupełny.

Zad. 3 Niech T będzie trójkątem na płaszczyźnie (z brzegiem). Czy istnieje funkcja ciągła z T na $\mathrm{Bd}(T)$?

Zad. 4 Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją stale równą 0. Na przestrzeni $X = C[0,1] \sqcup C[0,1] \subseteq (C[0,1] \times \{0\}) \times (C[0,1] \times \{1\})$ wprowadzamy relację równoważności $\sim$ taką, że $\langle f, 0\rangle \sim \langle f, 1\rangle$. Czy $X_{/\sim}$ jest przestrzenią spójną?

Zad. 5 Czy odcinek $[0,1]$ jest sumą przeliczalnie wielu podzbiorów homeomorficznych ze zbiorem Cantora?

Zad. 6 Rozważmy przestrzeń wszystkich ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych X z metryką

$$d((x_n),(y_n)) = \sup_n(|x_n - y_n|).$$

Niech C będzie podprzestrzenią złożoną ze wszystkich ciągów zbieżnych do 0. Odpowiedz na poniższe pytania uzasadniając odpowiedzi.

- Znajdź wnętrze i domknięcie C jako podzbioru X (bez uzasadnienia).
- Czy X jest zwarta?
- Czy X jest ośrodkowa?
- Czy X jest przestrzenią metryzowalną?

Zad. 7 Niech R będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$ w kształcie litery R i niech P będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$ w kształcie litery P. Odpowiedz na poniższe pytania podając uzasadnienia.

a) Czy R jest homeomorficzna z P?

b) Czy R jest ciągłym obrazem P?

c) Czy P jest homeomorficzna z pewną przestrzenią ilorazową $R_{/\sim}$?

d) Czy P jest przestrzenią jednospójną?

Zad. 8 Niech X będzie przestrzenią topologiczną (Hausdorffa) i niech $A \subseteq X$. Czy $\mathrm{Bd}(A)$ musi mieć puste wnętrze? Odpowiedz na to pytanie przy dodatkowych założeniach na zbiór A, uzasadniając swoje odpowiedzi.

- A jest dowolnym podzbiorem X,
- A jest otwartym podzbiorem X,
- A jest podzbiorem X typu G_δ.

Zad. 9 Rozważamy podzbiory przestrzeni euklidesowych. Niech X będzie dwoma stykającymi się sferami w $\mathbb{R}^3$, dokładniej

$$X = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1\}$$

i $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Ile jest różnych (niehomeomorficznych) podzbiorów $\mathbb{R}^2$ (**płaszczyzny**) homeomorficznych ze zbiorem postaci $X \setminus \{a, b, c\}$? Opisz je (naszkicuj) bez uzasadnień.

Zad. 10 Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na $\mathbb{R}^2$ daną wzorem

$$P \sim P' \iff (P = P') \text{ lub zarówno } P \text{ jak i } P' \text{ mają (choć jedną) współrzędną całkowitą.}$$

Rozważmy przestrzeń $X = \mathbb{R}^2_{/\sim}$ ($\mathbb{R}^2$ jest tu wyposażona w metrykę euklidesową).

- Czy X jest przestrzenią Hausdorffa? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy X jest ośrodkowa? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy X jest przestrzenią metryzowalną? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy X jest spójna? Odpowiedź uzasadnij.
- Zaproponuj nazwę tej przestrzeni.

Zad. 11 Zapoznaj się z definicją metryki rzeka.