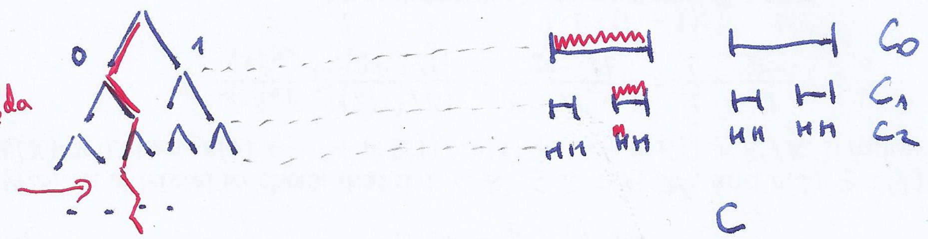
Tw. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest homeomorficzne z C, zbiorem Cantora.

D-d. Rysunek, który trzeba mieć przed oczami:

Tak wygląda ciąg 0-1.



$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\qquad$ C Zbiór Cantora.

Rozważmy funkcję

$$h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow C \quad \text{daną wzorem}$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x(n)}{3^n}$$

Funkcja h bierze od nas ciąg zerojedynkowy, zamienia jedynki na dwójki i interpretuje wynik jako rozwinięcie trójkowe liczby rzeczywistej (elementu $[0,1]$).

$$0,1,0,0,1,1,\ldots \mapsto 0{,}020022\ldots$$

To jest formalizacja funkcji, która ciągowi zerojedynkowemu z lewego rysunku przypisuje element odcinka po prawej stronie, który znajduje się w „cząstkach" wybieranych przez nasz ciąg.

__Uwaga__ To, że ta funkcja jest dobrze określona wynika z faktu, że zbiór Cantora to zbiór punktów, które da się zapisać w systemie trójkowym bez używania cyfry „1".

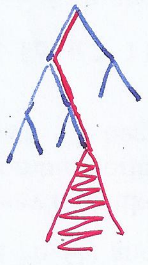
- Funkcja h jest różnowartościowa i „na" – proste ćwiczenie.

Pokażemy teraz, że funkcja h^{-1} jest ciągła.

Rozważmy w tym celu dowolną kulę B w $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

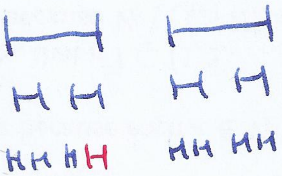
Musimy pokazać, że $(h^{-1})^{-1}[B] = h[B]$ jest otwarty.

Kula w $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wygląda tak:

$B =$  ← wszystkie ciągi o ustalonych pierwszych n współrzędnych.

Wtedy $h[B]$ to te elementy C, które mają ustalone pierwsze n cyfr rozwinięcia trójkowego.

To po prostu jedna z „cząstek" zbioru Cantora.



Jest to zbiór otwarty:

Zoom in: 

jako przekrój C z pewnym przedziałem otwartym.

To kończy dowód ciągłości h^{-1}.

Ponieważ h^{-1} jest funkcją 1-1, „na", ciągłą określoną na przestrzeni zwartej (zbiór Cantora jest ograniczony i domknięty jako przekrój zbiorów domkniętych $C_0, C_1, \ldots$).

A więc jest automatycznie homeomorfizmem.

∎