Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

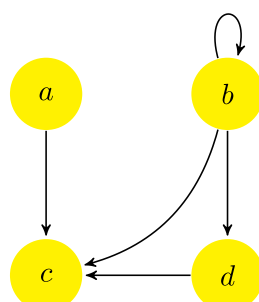
Zad. 1 Zapisz poniższe zdania korzystając z kwantyfikatorów, symboli logicznych, arytmetycznych itd. **Nie można** używać symbolu podzielności i oznaczeń na moc zbioru. W poniższych zdaniach a i b są liczbami naturalnymi, (a_n) ciągiem rzeczywistym, a A jest zbiorem.

a) Każdy dzielnik liczby a jest dzielnikiem liczby b.

b) Nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) jest dodatnich.

c) Zbiór A ma co najmniej 3 elementy.

Zad. 2 Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ ma następujący diagram:



Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania:

a) $\exists y \ \big(y\mathsf{R}x \land \exists z \ (z \neq x \land y\mathsf{R}z)\big)$:

b) $\forall y \ \big(x\mathsf{R}y \implies \exists z, w \ (y\mathsf{R}z \land z\mathsf{R}w)\big)$:

Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 3 Niech n oznacza liczbę naturalną. Rozważmy zdanie

Jeśli n jest nieparzyste, to (jest podzielne przez 16, o ile jest podzielne przez 4).

Zapisz powyższe jako formułę logiczną stosując oznaczenia: p: "n jest parzyste", q: "n jest podzielne przez 4", r: "n jest podzielne przez 16".

Rozstrzygnij w każdym z poniższych przypadków, czy powyższe zdanie jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe, czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (w zależności od liczby n). Podaj uzasadnienia.

a) n jest parzyste,

b) n jest nieparzyste.

Zad. 4 Rozstrzygnij (podając uzasadnienie) czy poniższa równość zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, C:

$$(A \setminus B) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$$

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 5 Niech $\leq$ będzie relacją częściowego porządku na zbiorze X.

a) Zapisz symbolicznie zdanie *W zbiorze X istnieje element minimalny, który nie jest elementem najmniejszym.*

b) Podaj przykład nieskończonego zbioru częściowo uporządkowanego, który spełnia powyższe zdanie.

c) Udowodnij, że jeśli $\leq$ jest relacją liniowego porządku, to $(X, \leq)$ nie spełnia powyższego zdania.

Zad. 6 Zdefiniujmy na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relację $\preceq$ w następujący sposób:

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x'.$$

Czy $\preceq$ jest relacją częściowego porządku? Uzasadnij odpowiedź.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 7 Załóżmy, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze X. Wiemy, że $a \in [b]_\sim$ i $\neg(a \sim c)$. Czy $b \sim c$? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 8 Dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiujemy relację równoważności $\sim_f$ przez

$$x_0 \sim_f x_1 \iff f(x_0) = f(x_1).$$

a) Niech $g(x) = \sqrt{|x|}$. Wyznacz $[4]_{\sim_g}$.

b) Niech $h(x) = |x|$. Wyznacz $X/_{\sim_h}$.

c) Podaj przykład funkcji f takiej, że $\sim_f$ ma dokładnie 3 klasy abstrakcji.

d) Udowodnij, że f jest funkcją różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy $\sim_f$ jest relacją równości na $\mathbb{R}$.

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 9 Niech $f\colon X \to Y$. Zapisz symbolicznie, używając kwantyfikatorów i symboli logicznych, zdanie "*f jest bijekcją*".

Zad. 10 Jakiej mocy jest zbiór $(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}) \setminus \mathbb{R}$? Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

Zad. 11 Podaj sformułowanie Hipotezy Continuum.

Zad. 12 Niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów liczb rzeczywistych. Na X zdefiniujmy relację równoważności $\sim$.

$$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

a) Podaj przykład dwóch ciągów (a_n) i (b_n) takich, że $(a_n) \sim (b_n)$ i $\forall n\ a_n \neq b_n$.

b) Ile klas abstrakcji ma relacja $\sim$? Uzasadnij odpowiedź.