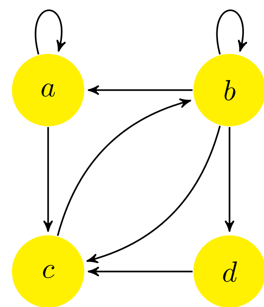
Część 1, Kolokwium 2 Imię i nazwisko:

Zad. 1 (4) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ ma następujący diagram:



Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania:

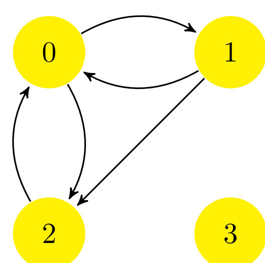
a) $\forall y\ x\mathsf{R}y$:

b) $\forall y\ y\mathsf{R}x$:

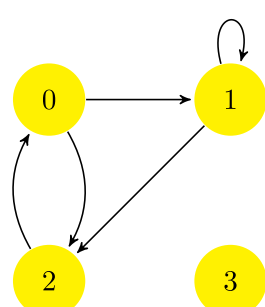
c) $\exists y\ \exists z\ x\mathsf{R}y \wedge y\mathsf{R}z \wedge z\mathsf{R}x$:

d) $\forall y\ \big(x\mathsf{R}y \implies \exists z(y\mathsf{R}z \wedge z\mathsf{R}y)\big)$:

Zad. 2 (2) Na poniższym diagramie dorysuj strzałki tak, aby był to diagram relacji przechodniej, która nie jest symetryczna.



Zad. 3 (2) Dlaczego na poniższym diagramie nie da się dorysować strzałek w ten sposób, aby był to diagram relacji częściowego porządku?



Część 2, Kolokwium 2 Imię i nazwisko:

Zad. 4 (1) Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest "na", ale nie jest różnowartościowa.

Zad. 5 (2) Podaj przykład funkcji $f\colon \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ takiej, że

$$f[\{1,2,3\}] = \{1,2\} \text{ i } f^{-1}[\{1,2\}] \neq \{1,2,3\}.$$

Zad. 6 (2) Czy istnieje funkcja odwrotna do funkcji $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(n,m) = \frac{n}{m+1}$? Podaj ją lub uzasadnij, że jej nie ma.

Zad. 7 (3) Niech $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ będą funkcjami "na". Udowodnij, że złożenie $g \circ f$ jest funkcją "na".

Część 3, Kolokwium 2 Imię i nazwisko:

Zad. 8 (2) Dla $n > 0$ niech $A_n = (n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n})$. Podaj, o ile istnieją, kres dolny i kres górny zbioru

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Uwaga: mamy tu na myśli naturalny porządek na liczbach rzeczywistych.

Zad. 9 (3) Poniższe zdania odnoszą się do zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leq)$ oraz $a \in X$. Zapisz je symbolicznie.

W X istnieją co najmniej dwa elementy minimalne.

a jest elementem maksymalnym, lecz nie największym.

$(X, \leq)$ jest porządkiem liniowym.

Zad. 10 (4) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zdefiniujmy relację R na $\mathbb{R}$ poprzez

$$x \mathsf{R} y \iff f(x) \leq f(y).$$

a) Załóżmy, że R jest relacją częściowego porządku. Czy to oznacza, że f jest różnowartościowa?

b) Załóżmy, ze R jest relacją liniowego porządku. Czy to oznacza, że f jest "na"?