
Część 1, Kolokwium 3 Imię i nazwisko:

Zad. 1 (2) Relacja R na $\mathbb{R}^2$ jest zdefiniowana w następujący sposób:

$\langle x, y \rangle R \langle x', y' \rangle$ jeśli odległość punktu $\langle x, y \rangle$ od punktu $\langle x', y' \rangle$ jest mniejsza niż 1.

Czy R jest relacją równoważności? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 2 (3) Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze X i niech $a, b \in X$. Pokaż, że $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$ lub $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$.

Zad. 3 (3) Podaj przykład relacji równoważności $\sim$ na zbiorze $\mathbb{R}$, która ma nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji.

Część 2, Kolokwium 3 Imię i nazwisko:

Zad. 4 (2) Podaj 3 zbiory nieskończone parami różnej mocy.

Zad. 5 (2) Zdefiniuj bijekcję $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Zad. 6 (2) Czy jeśli $|A| < |B|$ i $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, to $|A \cup C| < |B \cup C|$?

Zad. 7 (2) Uzasadnij, że następujące zbiory są równoliczne:

$$A = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}.$$

Część 3, Kolokwium 3 Imię i nazwisko:

Zad. 8 Niech $\sim$ będzie relacją równoważności określoną na $\mathbb{R}^2$ wzorem

$$\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle \iff y - 2x = y' - 2x'.$$

- a) (1,5) Naskicuj w układzie współrzędnych zbiór $[\langle 0, 0 \rangle]_\sim$.
- b) (1,5) Naskicuj w układzie współrzędnych zbiór $[\langle 1, 1 \rangle]_\sim$.
- c) (2) Opisz $\mathbb{R}^2_{/\sim}$.
- d) (2) Jakiej mocy są klasy abstrakcji relacji $\sim$? Jakiej mocy jest $\mathbb{R}^2_{/\sim}$?

Zad. 9 (2) Załóżmy, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze X . Udowodnij, że

$$|X_{/\sim}| \leq |X|.$$