
WdM A - Lista 1 (ćwiczenia 26 II 2016)

Ćw. 1 Oznaczając symbolem p zdanie *Ala je*, a symbolem q zdanie *As wyje* i używając spójników logicznych przedstaw poniższe zdania jako formuły logiczne:

- a) Ala je pod warunkiem, że As wyje.
- b) As nie wyje, zaś Ala nie je.
- c) Ani Ala nie je, ani As nie wyje.
- d) As wyje, o ile Ala nie je.
- e) As wyje dokładnie wtedy, gdy Ala je.
- f) Bądź Ala je, bądź As wyje.
- g) Albo As wyje, albo Ala nie je.
- h) Ala je tylko wtedy, gdy As wyje.
- i) Ala je dokładnie wtedy, gdy As wyje.
- j) Ala je, a As wyje.
- k) Ala je, chyba że As wyje.
- l) Ala wyje pomimo tego, że As je.
- m) Ala je, no i As wyje.

Ćw. 2 Stosując oznaczenia, jak w powyższym zadaniu, zapisz zdania reprezentowane przez poniższe formuły starając się nadać im możliwie potoczne brzmienie.

- a) $p \implies q$,
- b) $p \iff \neg q$,
- c) $\neg(\neg q \wedge p)$,
- d) $(p \implies q) \implies p$,
- e) $p \wedge (p \implies q)$,
- f) $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$.

Sprawdź, czy informacja, że p jest zdaniem fałszywym, wystarczy aby określić ich wartość logiczną. Jeśli tak, to wyznacz tę wartość, jeśli nie, to pokaż, że obie wartości są możliwe.

Zad. 3 Czy dla wszystkich liczb naturalnych n prawdziwe są następujące zdania?

- a) Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to o ile n jest liczbą złożoną, to $n = 4$.
- b) n jest podzielne przez 2 pod warunkiem, że n jest podzielne przez 5 i $5 < n < 15$.
- c) n jest podzielne przez 3 dokładnie wtedy, gdy n jest podzielne przez 7.
- d) To, że n jest liczbą pierwszą mniejszą od 6, jest warunkiem dostatecznym do tego, że n dzieli 30.
- e) To, że n dzieli 30, jest warunkiem dostatecznym do tego, że n jest liczbą pierwszą mniejszą od 6.

Rozważ warianty zdań (d) i (e), w których “dostatecznym” jest zastąpione przez “koniecznym”.

Zad. 4 Niech C oznacza czworokąt na płaszczyźnie. Rozważmy zdanie

Jeśli C jest trapezem, o ile jest rombem, to jeśli C jest trapezem, to jest kwadratem.

Zapisz powyższe jako formułę logiczną stosując oznaczenia: t : “ C jest trapezem”, r : “ C jest rombem”, k : “ C jest kwadratem”. Rozstrzygnij w każdym z poniższych przypadków, czy powyższe zdanie jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe, czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (w zależności od czworokąta C).

- a) C jest trapezem,
- b) C nie jest prostokątem,
- c) C nie jest rombem, lecz jest trapezem.

Zad. 5 Wykaż, że następujące formuły rachunku zdań są tautologiami:

- a) $p \implies p$,
- b) $p \implies (q \implies p)$,
- c) $p \vee \neg p$,
- d) $p \implies (q \implies p \wedge q)$,
- e) $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$,
- f) $(\neg p \implies p) \implies p$,
- g) $\neg p \implies (p \implies q)$,
- h) $p \wedge q \implies p$,
- i) $p \implies p \vee q$,
- j) $(p \implies (q \implies r)) \implies ((p \implies q) \implies (p \implies r))$.

Zad. 6 Sformułuj negacje poniższych zdań (n oznacza tutaj liczbę naturalną).

- a) n jest liczbą parzystą i pierwszą,
- b) jeśli n jest liczbą pierwszą, to jest liczbą parzystą,
- c) n jest większe od 5 lub n^2 jest mniejsze od 30,
- d) n jest parzyste wtedy i tylko wtedy, gdy n^2 jest parzyste,
- e) jeśli n jest parzyste i większe od 7, to n jest pierwsze lub mniejsze od 3.

Wskazówka: w razie problemów napisz najpierw schemat danego zdania i zastosuj odpowiednie prawo rachunku zdań.

Zad. 7 Sprawdź, czy poniższe formuły są tautologiami. Traktuj tabelkę jako ostateczność, postaraj się najpierw zrozumieć daną formułę.

- a) $((p \vee q) \wedge \neg p) \implies q$,
- b) $(p \implies q) \implies (p \wedge r \implies q)$,
- c) $(p \implies q) \implies (p \implies q \vee r)$,
- d) $p \implies (\neg p \vee q)$,
- e) $((p \vee q) \wedge (p \implies q)) \implies (q \implies p)$,
- f) $p \implies (\neg q \wedge q \implies r)$.

Zad. 8 Wybierz fakt matematyczny, który można nietrudno udowodnić wprost i przeprowadź jego staranny dowód. Podobnie, przeprowadź starannie jakiś dowód nie wprost. (Możesz poćwiczyć na faktach znanych Ci z innych wykładów albo ze szkoły średniej).

Zad. 9 (*) Trzech braci: Prawdomówny, Kłamczuch i Niezdecydowany odpowiadają na pytania TAK lub NIE. Prawdomówny zawsze mówi prawdę, Kłamczuch zawsze kłamie, a Niezdecydowany czasem mówi prawdę, a czasem kłamie. Musisz za pomocą trzech pytań określić, który z braci to który. Każde pytanie może być skierowane tylko do jednego z braci.