WdM A - Lista 10 (ćwiczenia 20 V 2016)

Zad. 1 Niech $\mathcal{W}$ oznacza rodzinę wielomianów o współczynnikach całkowitych. Zdefiniujmy na $\mathcal{W}$ relację

$$W \sim V \iff W \text{ i } V \text{ mają ten sam stopień.}$$

a) Upewnij się, że jest to relacja równoważności.
b) Wyznacz klasę abstrakcji wielomianu $W(X) = 3X^3 + 2X^2 - X + 13$.
c) Wyznacz zbiór ilorazowy.

Zad. 2 Powtórz polecenia z poprzedniego zadania dla relacji zdefiniowanej przez

$$W \sim V \iff W(0) = V(0).$$

Spróbuj wymyślić inne relacje równoważności określoną na $\mathcal{W}$.

Zad. 3 Na $\mathbb{N}$ określamy relację równoważności w następujący sposób:

$$n \sim m \iff \exists k \in \mathbb{N} \ \frac{n}{2^k} \text{ i } \frac{m}{2^k} \text{ są liczbami naturalnymi nieparzystymi.}$$

a) Sprawdź, że $\sim$ jest relacją równoważności.
b) Znajdź $[0]_\sim$, $[1]_\sim$, $[2]_\sim$ i $[117]_\sim$.
c) Wyznacz zbiór ilorazowy relacji $\sim$.

Zad. 4 Na rodzinie wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ określamy relację równoważności poprzez

$$A \sim B \iff A \text{ i } B \text{ są równoliczne.}$$

Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.
Pokaż, że relacja $\preceq$ zdefiniowana przez

$$[A]_\sim \preceq [B]_\sim \iff |A| \leq |B|$$

jest relacją liniowego porządku na zbiorze ilorazowym $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_\sim$. (Przypomnienie: $|A| \leq |B|$ oznacza, że istnieje funkcja różnowartościowa $g\colon A \to B$.) Wyznacz element najmniejszy i największy tego porządku.

Zad. 5 Na zbiorze X określona jest relacja równoważności $\sim$ i relacja częściowego porządku $\leq$. Poniższe zdania odnoszą się do tych relacji. Zapisz je symbolicznie (nie posługując się symbolem klasy abstrakcji i zbioru ilorazowego):

a) Istnieją dwa elementy nieporównywalne, które są równoważne.
b) Wszystkie elementy minimalne są w jednej klasie abstrakcji.
c) Zbiór ilorazowy $X/_\sim$ ma jeden element.
d) Zbiór ilorazowy $X/_\sim$ ma co najmniej 3 elementy.
e) Każdy element maksymalny jest równoważny z pewnym elementem minimalnym.
f) W pewnej klasie abstrakcji istnieje 3-elementowy łańcuch.

Zad. 6 Dla jakich zbiorów X prawdziwe jest następujące zdanie?

Nie istnieje właściwy podzbiór X równoliczny z X.

Zad. 7 Wykonaj polecenia:

a) Napisz wzorem funkcję różnowartościową $f\colon (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$. (Uwaga: funkcja nie musi być "na". Przypomnij sobie Hotel Hilberta.)

b) Pokaż, że istnieje funkcja różnowartościowa $g\colon \mathbb{Q}^+ \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. (Uwaga: $\mathbb{Q}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb wymiernych).

c) Posiłkując się (b), pokaż, że istnieje funkcja różnowartościowa $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

d) Udowodnij, że jeśli $A \sim B$ i $C \sim D$, to $(A \times C) \sim (B \times D)$. W szczególności $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

e) Posiłkując się (a), (c) i (d) pokaż, że $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$.

Zad. 8 (*) Pokaż, że jeżeli $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, to $A \sim B$.

Zad. 9 (*) Nieskończony zbiór krasnoludków zostały ponumerowany liczbami naturalnymi, ustawiony w rząd zgodnie z tą numeracją i ubrany w czapeczki dwóch kolorów. Każdy krasnoludek widzi jedynie towarzyszy, którzy stoją przed nim (Zerowy widzi wszystkich oprócz siebie, Pierwszy wszystkich oprócz siebie i Zerowego, itd.). Żaden nie wie, jakiego koloru nosi czapkę. Następnie każdy krasnoludek zostaje zapytany o kolor swojej czapki. Od tego, czy odpowie trafnie, zależy jego życie. Jaką strategię powinny przygotować krasnale, aby uratować jak największą część swojej grupy? Ilu krasnali da się uratować? (Wskazówka: użyj zbioru ilorazowego relacji z zadania 8 z listy 9.)