
WdM A - Lista 12 (ćwiczenia 3 VI 2016)

Zad. 1 Pokaż, że zbiór liczb wymiernych jest gęsty w liczbach rzeczywistych, tzn. dla każdych liczb rzeczywistych a, b takich, że $a < b$ znajdziemy $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $a < q < b$. W szczególności $\mathbb{Q} \cap (a, b) \neq \emptyset$ dla każdych $a < b$.

Zad. 2 Jak dużej mocy może być rodzina podzbiorów \mathbb{N} , które są parami rozłączne? A rodzina podzbiorów \mathbb{R} , które są parami rozłączne?

Zad. 3 Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Jakiej mocy może być zbiór $f[\mathbb{N}]$?

Zad. 4 Pokaż, że następujące zbiory są przeliczalne:

- a) Zbiór punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych wymiernych.
- b) Zbiór parami rozłącznych przedziałów na prostej.
- c) Zbiór parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.
- d) Zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych.
- e) Zbiór liczb algebraicznych.

Które z nich są mocy \aleph_0 ?

Zad. 5 Pokaż, że następujące zbiory są nieprzeliczalne:

- a) Zbiór liczb niewymiernych.
- b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb pierwszych.
- c) Zbiór punktów wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sin(x)$.
- d) Zbiór wszystkich punktów kuli o promieniu 1.
- e) Zbiór wszystkich podzbiorów kuli o promieniu 1.
- f) Zbiór $\{A \subseteq \mathbb{Z}: \mathbb{N} \subseteq A\}$.

Jakiej mocy są powyższe zbiory?

Zad. 6 Podaj przykład 6 zbiorów nieskończonych o różnych mocach.

Zad. 7 (*) Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są ciągłe, jest mocy \mathfrak{c} , a zbiór wszystkich, niekoniecznie ciągłych, funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma moc większą niż \mathfrak{c} .

Zad. 8 (*) Pokaż, że istnieje rodzina \mathcal{A} podzbiorów \mathbb{N} taka, że $A \cap B$ jest skończona dla różnych $A, B \in \mathcal{A}$ i \mathcal{A} jest mocy \mathfrak{c} .