**WdM A - Lista 2** (ćwiczenia 5 III 2016)

**Ćw. 1** O liczbie rzeczywistej $x$ wiadomo, że jeśli $x \leq 5$, to $x > 3$. Czy stąd wynika, że $x > 3$? Czy wynika, że $x \leq 5$?

**Ćw. 2** O liczbie naturalnej $n$ wiemy, że

a) jeśli $n$ jest podzielne przez 3 lub jest podzielne przez 4, to $n$ jest podzielne przez 12 *oraz*
b) jeśli $n$ jest podzielne przez 3, to nie dzieli się przez 2.

Czy stąd wynika, że $n$ nie dzieli się przez 3?

**Zad. 3** O liczbie rzeczywistej $x$ wiemy, że

a) jeśli $x > 0$, to $x > 5$, o ile $x > 3$ *oraz*
b) jeśli $x \leq 5$, to $x > 0$.

Czy stąd wynika, że $x > 3$?

**Zad. 4** (Zadanie Lewisa Carrolla) O moich dzieciach wiadomo, że

a) wszyscy moi synowie są szczupli,
b) wszystkie moje zdrowe dzieci uprawiają sport,
c) żadne moje dziecko, które jest łakomczuchem, nie jest szczupłe,
d) żadna moja córka nie uprawia sportu.

Czy z tego wynika, że żadne moje zdrowe dziecko nie jest łakomczuchem?

**Ćw. 5** Ile jest (z dokładnością do równoważności) formuł o trzech zmiennych? A ile jest tautologii o trzech zmiennych?

**Zad. 6** Podaj przykład formuły logicznej $\alpha(p, q, r)$ o poniższej tabelce wartości logicznych:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\alpha(p,q,r)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

a) Ile jest takich formuł?
b) Ile ich jest z dokładnością do równoważności?
c) Czy potrafisz wymyślić inny sposób tworzenia formuł logicznych o zadanych tabelkach niż ten podany na wykładzie?

**Zad. 7** Zdefiniuj alternatywę i koniunkcję przy pomocy implikacji i negacji. Następnie przeformułuj odpowiednio zdania *Lubię ciastka i lody* oraz *Na wakacje pojadę nad morze lub w góry.* Zapisz formułę z poprzedniego zadania przy pomocy negacji i implikacji.

**Zad. 8** Zapisz poniższe formuły nie używając znaku negacji, równoważności ani implikacji (w razie potrzeby używając podstawień $p' = \neg p$, $q' = \neg q$ i $r' = \neg r$)

a) $\neg(p \vee (\neg q \wedge r))$,
b) $p \implies (q \implies r)$,
c) $\neg(p \implies (p \vee r))$,
d) $p \iff (q \iff r)$,
e) $(p \implies q) \implies (r \implies p)$.

**Zad. 9** Znajdź wszystkie formuły (z dokładnością do równoważności) $\alpha(p, q)$, dla których $p \vee q \implies \alpha(p, q)$ jest tautologią. Podobnie dla $p \wedge q \implies \alpha(p, q)$.

**Zad. 10** (*) Pokaż, że za pomocą koniunkcji i alternatywy nie da się zdefiniować implikacji.

**Zad. 11** Kreską Sheffera nazywamy spójnik o następującej tabelce wartości logicznych:

| $p$ | $q$ | $p\|q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

a) Zdefiniuj kreskę Shefera przy pomocy negacji i koniunkcji. Zdefiniuj negację przy pomocy kreski Sheffera.
b) (*) Pokaż, że za pomocą kreski Sheffera można zdefiniować wszystkie formuły logiczne (wskazówka: użyj pewnego twierdzenia z wykładu).
c) (*) Pokaż, że spójnik zdefiniowany formułą $\neg(p|q)$ ma podobną własność i że są te jedyne dwa spójniki dwuargumentowe o tej własności.

**Zad. 12** Mamy dane funkcje zdaniowe $p(n) =$"$3|n$", $q(n) =$"$2|n$", $r(n) =$"$n$ jest liczbą pierwszą", $s(n) =$"$n \in [8, 17]$". Dla których liczb $n \in \{0, 1, \ldots, 25\}$ poniższe zdania są prawdziwe?

a) $\neg p(n) \implies s(n)$,
b) $q(n) \iff r(n)$,
c) $(p(n) \vee q(n)) \wedge r(n)$,
d) $\neg s(n) \implies (p(n) \vee q(n))$,
e) $\big(p(n) \vee \neg q(n)\big) \implies \big(p(n) \implies s(n)\big)$.

**Zad. 13** Dla każdego z poniższych zbiorów wymyśl funkcję zdaniową $p(n)$, która "wytnie" go ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 50\}$. Postaraj się, żeby zapisać $p(n)$ w postaci prostych funkcji zdaniowych połączonych spójnikami logicznymi. Nie używaj symbolu "$\in$".

a) $\{9, 18, 27, 36\}$,
b) $\{6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46\}$,
c) $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
d) $\{3, 17, 48\}$,
e) $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 44\}$,