WdM A - Lista 3 (ćwiczenia 12 III 2016)

Zad. 1 Wypisz elementy zbiorów A i B. Czy $A \subseteq B$? Czy $B \subseteq A$? Czy $A = B$? Czy mają elementy wspólne? Czy są rozłączne? Czy $A \in B$ lub $B \in A$?

a) $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4} - 1, \sqrt{9}, \sqrt{9} - 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,
b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,
c) $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, $B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$,
d) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 \leq 20\}$,
e) $A = \emptyset$, $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 + x = 13\}$,

Zakładamy, że a, b i c nie są zbiorami.

Zad. 2 Podaj warunki konieczne i warunki dostateczne zachodzenia poniższych równości:

a) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$,
b) $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$,
c) $\{\{a, b\}, c\} = \{\{a\}, c\}$,
d) $\{\{a, b\}, d\} = \{\{a\}\}$,
e) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

Ćw. 3 Spróbuj "przetłumaczyć" na język rachunku zbiorów różne prawa rachunku zdań (i inne tautologie).

Ćw. 4 Poćwicz mniej i bardziej formalne dowodzenie równości i inkluzji (np. różnych praw rachunku zbiorów).

Ćw. 5 Zbiory A, B, C są podzbiorami X. Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe:

a) $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$,
b) $x \in A \implies x \in B$,
c) $(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$,
d) $\neg(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$.

Zdefiniuj te zbiory przy użyciu $\cup$, $\cap$, itd.

Zad. 6 Zaznacz w sposób "losowy" kontur zbioru U na diagramie Venna zbiorów A, B, $C \subseteq X$. Następnie zapisz za pomocą operacji $\cup$, $\cap$ i $\setminus$ zbiór U. Napisz funkcję zdaniową p taką, że $p(x) \iff x \in U$ przy pomocy funkcji $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$, $x \in X$.

Zad. 7 Udowodnij poniższe stwierdzenia:

a) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
b) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,
d) $A \subseteq A \cup B$, $\quad A \setminus B \subseteq A$,
e) jeśli $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$, to $A \cup C \subseteq B \cup D$ i $A \cap C \subseteq B \cap D$.

Spróbuj przeprowadzać dowody na różne sposoby (w szczególności unikające zbędnych formalizmów). Napisz tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów.

Zad. 8 Wskaż przykład niepustych zbiorów skończonych takich, że

$$(B \cup C) \cap A \neq (A \cup C) \cap B.$$

Podobnie wskaż takie zbiory, że

$$A \cup C \subseteq B \cup C \text{ oraz } B \cap C \subseteq A \cap C.$$

Zad. 9 Używając jedynie symboli $\{$, $\}$, $\emptyset$, , zapisz zbiór o dwóch elementach rozłączny ze zbiorem

$$\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Zad. 10 Dane są pewne zbiory A, B, C w przestrzeni X. Wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że

a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$?
b) $A \cap B \cap C = \emptyset$?
c) $A \cap C = \emptyset$?

Odpowiedzi uzasadnij!

Ćw. 11 Wypisz wszystkie podzbiory zbioru

a) $\{1\}$,
b) $\{1, 2\}$,
c) $\emptyset$,
d) $\{\{1, 2\}, 3\}$,
e) $\{\{1, 2, 3\}\}$.

Ile podzbiorów będzie miał zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? (Nie wypisuj ich!)
A zbiór $\{\{1, 2, \{1, 2\}\}, \{\{\{\{3\}\}\}\}\}$? A zbiór jego podzbiorów?

Zad. 12 Udowodnij

a) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$,
b) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.

Wykaż, że punkcie b) nie zachodzi inkluzja odwrotna.

Ćw. 13 *Różnicę symetryczną* definiujemy jako $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

a) Pokaż, że różnica symetryczna jest łączna, tzn. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
b) Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 5\}$. Znajdź zbiór X, dla którego zachodzi równość

$$(A \triangle X) \triangle B = C.$$

Zad. 14 Niech $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$. Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia. Naszkicuj te zbiory w produkcie $X \times Y$.

a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$,
b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$,
c) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus \big((A \times D) \cup (B \times C)\big)$,
d) $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$.