

---

**WdM A - Lista 4** (ćwiczenia 18 III 2016)

---

**Zad. 1** Niech  $A, B$  będą zbiorami. Znajdź wszystkie zbiory  $X$ , że

$$A \times X = X \times B.$$

**Ćw. 2** Wypisz wszystkie elementy  $\mathcal{P}(\{1, 2\} \times \{5\})$ .

**Ćw. 3** Ile elementów ma zbiór  $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\})$ ?

**Ćw. 4** Produkt  $A \times B$  jest 6-elementowy, a wśród jego elementów znajdują się  $\langle 1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, 3 \rangle$  i  $\langle 3, 3 \rangle$ . Znajdź  $B \times A$ .

**Zad. 5** Niech  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ . Zapisz  $(A \times B)^c$  jako sumę produktów kartezjańskich.

**Zad. 6** Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory  $A$  i  $B$ , będące rozłącznymi podzbiorem  $[0, 1] \times [0, 1]$  takimi, że

$$\pi_X[A] = \pi_X[B] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] = \pi^Y[A] = \pi^Y[B].$$

**Zad. 7** Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór  $A$ , który ma 5 elementów i taki, że  $\pi_X[A]$  ma 2 elementy a  $\pi^Y[A]$  jest zbiorem 3-elementowym.

**Zad. 8** Zapisz funkcję zdaniową równoważną funkcji

$$\langle x, y \rangle \notin (A \cup B) \times (C \setminus D)$$

bez używania symboli mnogościowych ( $\cup$ ,  $\setminus$ ,  $\times$ , itd.)

**Zad. 9** Załóżmy, że  $A, B, C$  i  $D$  są niepustymi zbiorami.

- a) Pokaż, że jeśli  $A \times B = C \times D$ , to  $A = C$  i  $B = D$ .
- b) Czy z tego, że  $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$  wynika, że  $A \cap C = \emptyset$  i  $B \cap D = \emptyset$ ?
- c) Czy z tego, że  $(A \times B) \subseteq (C \times D)$  wynika, że  $A \subseteq C$  i  $B \subseteq D$ ?

Czy założenie niepustości jest potrzebne?

**Zad. 10** Naszkicuj w układzie współrzędnych  $A \times B$  i  $B \times A$ , jeśli

- a)  $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ ,
- b)  $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : (0 < x < 1) \vee (3 < x < 4)\}$ ,
- c)  $A = \{x \in \mathbb{R} : (-1 \leq x < 1) \vee (2 < x \leq 3)\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : (0 < x < 1) \vee (3 < x \leq 4)\}$ ,
- d)  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \mathbb{R}$ ,
- e)  $A = \mathbb{Q}$ ,  $B = \mathbb{Q}$ .

**Zad. 11** Naszkicuj w układzie współrzędnych wykresy następujących funkcji zdaniowych:

- a)  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ ,
- b)  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{x}\}$ ,
- c)  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x = \sin y\}$ ,
- d)  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje } t \text{ takie, że } x \cdot t = y\}$ ,

- e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 = y \vee 4x = 3y\}$ ,
- f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \implies y = 4x\}$ ,
- g)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \iff y = 4x\}$ ,

W każdym wypadku znajdź rzuty tych wykresów oraz ich cięcia w wybranych punktach.

**Ćw. 12** Niech  $A \subseteq X \times Y$  będzie wykresem funkcji zdaniowej  $p(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Uzupełnij

- $\pi_X[A] = X$ , jeśli dla każdego ..... istnieje ..... taki, że  $p(x, y)$  jest prawdziwa,
- $\pi^Y[A] = Y$ , jeśli dla każdego ..... istnieje ..... taki, że  $p(x, y)$  jest prawdziwa,
- ....., jeśli dla każdego  $x$  i każdego  $y$  funkcja  $p(x, y)$  jest prawdziwa,
- ....., jeśli dla żadnego  $x$  i  $y$  funkcja  $p(x, y)$  nie jest prawdziwa.

**Zad. 13** Niech  $X = \{0, 1, \dots, 9\}$ . Zdefiniujmy  $A \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$  w następujący sposób:

$$\langle C, D \rangle \in A \iff C \subseteq D.$$

Znajdź rzuty  $A$ . Znajdź  $A_\emptyset$ ,  $A^\emptyset$ ,  $A_{\{0,1,2,3,4,5\}}$  i  $A^{\{0,1,2,3,4,5\}}$ .

**Zad. 14** (\*) Jaką cechę ma wykres zbioru  $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$  w układzie współrzędnych, jeśli wiemy, że dla każdego  $x \in [0, 1]$  zachodzi  $A_x = A^x$ ?

**Zad. 15** (\*) O zbiorze  $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$  wiemy, że  $A_x = [0, \sqrt{x}]$  dla każdego  $x \in [0, 1]$ . Podaj  $A^y$  dla  $y \in [0, 1]$ .