WdM A - Lista 5 (ćwiczenia 8 IV 2016)

Ćw. 1 Zapisz przy pomocy kwantyfikatorów, używając odpowiednich oznaczeń:

a) Każdy student, który przychodzi na egzamin, jest przygotowany. (Przykładowe oznaczenia: S - zbiór studentów, $e(x)$ - x przychodzi na egzamin, $p(x)$ - x jest przygotowany.)
b) Na egzamin przychodzą tylko przygotowani studenci.
c) Na egzamin przyszło tylko dwóch nieprzygotowanych studentów.
d) Żaden student, którzy przyszedł na egzamin, nie był przygotowany.
e) Na egzamin przyszedł student.
f) W każdym mieszkaniu w tym bloku mieszka przynajmniej jedna osoba. (Przykładowe oznaczenia: M - zbiór mieszkań w tym bloku, O - zbiór osób, $m(x, y)$ - x mieszka w y.)
g) W pewnym mieszkaniu w tym bloku nikt nie mieszka.
h) W pewnym mieszkaniu w tym bloku mieszkają przynajmniej dwie osoby.
i) Każdy człowiek zna człowieka, który nie zna człowieka, który nikogo nie zna. (Przykładowe oznaczenia: L - zbiór ludzi, $z(x, y)$ - x zna y.)

Ćw. 2 Określ zasięg kwantyfikatorów, znajdź zmienne wolne. Które z poniższych formuł są zdaniami? Które są zdaniami formalnymi?

a) $\forall x\ (x > 3) \implies y < 5$,
b) $\forall x \forall y\ (x > 3 \implies y < 5) \implies \forall x\ (x \neq 7)$,
c) $\forall x \forall y\ (p(x, y) \implies p(x, z))$,
d) $\exists x \exists y\ (x \neq y \vee z \leq 0)$,
e) $\forall x\ (x + y = z)$,
f) $\forall x \forall y\ (p(x, y)) \implies \forall x \forall z\ q(z, x)$,
g) $\forall x\ (x + y = z) \implies \exists z(\exists y(x - y \neq z \wedge \forall z(x \cdot y \geq z)))$

Zad. 3 Zapisz poniższe funkcje zdaniowe symbolicznie, za pomocą kwantyfikatorów. Które z nich są zdaniami?

a) Liczba x przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
b) Istnieje liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
c) Istnieje liczba pierwsza, która jest parzysta.
d) Nie istnieje największa liczba rzeczywista.
e) x jest liczbą nieparzystą podzielną przez 3.
f) Liczba z jest rozwiązaniem równania $x^3 - x^2 + 1 = 0$.
g) Żaden element zbioru A, który nie jest elementem zbioru B, nie jest rozwiązaniem równania $x^2 + x + 1 = 0$.
h) Jeśli liczby rzeczywiste x i y są różne, to $x < y$ lub $y > x$.
i) Jeśli n jest liczbą naturalną, to jej dowolna potęga naturalna jest naturalna.
j) Każdy zbiór A ma nadzbiór właściwy.
k) Zbiór A ma co najmniej dwa elementy.
l) Zbiór A ma co najwyżej dwa elementy.

m) Zbiór A ma dokładnie trzy elementy.
n) Ciąg $(a_n)_n$ jest rosnący.
o) Ciąg $(a_n)_n$ ma zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne.
p) Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. (Nie używaj tu symboli $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{IQ}$.)
q) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.
r) Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zad. 4 Zapisz poniższe zdania i funkcje zdaniowe prozą, w języku potocznym.

a) $\forall x\ x \notin A$,
b) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ n \leq x$,
c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ n < m$,
d) $\forall A\ (A \neq \emptyset \implies \exists B\ (B \subseteq A \wedge \exists x\ x \in B))$,
e) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y = y$,
f) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y = 0$,
g) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0)$,
h) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0 \wedge x \neq y)$,
i) $\exists n \in \mathbb{N}\ (\exists k \in \mathbb{N}\ (n = 2k + 1) \wedge \exists k \in \mathbb{N}\ (n = 3k))$.

Zad. 5 Podaj konkretne funkcje zdaniowe świadczące o tym, że poniższe zdania formalne nie są tautologiami rachunku kwantyfikatorów. Postaraj się znaleźć parę przykładów, szukając zarówno bezpośrednio funkcji zdaniowych (np. o zakresie liczb naturalnych lub rzeczywistych), jak i rysując najpierw odpowiednie wykresy i diagramy funkcji zdaniowych (patrz wykład).

a) $\exists x, y\ p(x, y) \implies \exists x\ \forall y\ p(x, y)$,
b) $\exists x, y\ p(x, y) \implies \exists x\ p(x, x)$,
c) $\forall y\ \exists x\ p(x, y) \implies \forall x\ p(x, x)$,
d) $\forall x\ p(x, x) \implies \forall x\ \forall y\ p(x, y)$,
e) $\exists x\ \forall y\ p(x, y) \implies \forall x, y\ p(x, y)$.
f) $\forall x\ (p(x) \vee q(x)) \implies \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$,