WdM A - Lista 6 (ćwiczenia 15 IV 2016)

Ćw. 1 Naszkicuj w układzie współrzędnych wykresy następujących funkcji zdaniowych (o zakresach będących zbiorem liczb rzeczywistych).

a) $p(x, y) = \exists t > 0\ x + t = y$,
b) $p(x, y) = \exists t \in \mathbb{R}\ y = t \cdot x$,
c) $p(x, y) = \forall t \in \mathbb{R}\ y = t \cdot y$,
d) $p(x, y) = \exists t \in \mathbb{R}\ x = 2t \wedge y = 3t$,
e) $p(x, y) = \forall t \in \mathbb{R}\ x = 2t \implies y = 2t$,
f) $p(x, y) = \exists t > 0\ x = 2t \wedge y = 3t$,
g) $p(x, y) = \forall t \in \mathbb{R}\ x = 2t \implies y = 3t$.

Wskazówka: można zacząć od rozważenia kilku konkretnych par $\langle x, y\rangle$ i ustalenia, czy należą one do wykresu, czy nie.

W każdym przypadku zaznacz na osi Ox lub Oy wykres funkcji $\exists x\ p(x, y)$ i $\exists y\ p(x, y)$.

Zad. 2 Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia (staraj się jednak nie wykonać obydwu poleceń na raz). Zapisz je symbolicznie i przeanalizuj ich strukturę. Dowody staraj się prowadzić posługując się naturalnym językiem.

a) Załóżmy, że A i B są zbiorami. Wtedy istnieje zbiór C taki, że $C \subseteq A$ oraz $B \subseteq C$.
b) Załóżmy, że A jest podzbiorem B. Wtedy istnieje zbiór C taki, że $B = A \cup C$ oraz A i C są rozłączne.
c) Załóżmy, że A i B są rozłącznymi zbiorami. Wtedy każdy podzbiór C zbioru A jest rozłączny ze zbiorem B.
d) Istnieją zbiory A i B takie, że każdy nadzbiór A jest podzbiorem B.
e) Istnieje zbiór rozłączny z każdym podzbiorem liczb naturalnych.
f) Załóżmy, że n i m są liczbami całkowitymi. Wtedy istnieją liczby całkowite k i l takie, że n jest sumą, a m różnicą liczb k i l.
g) Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą większą od 1. Wtedy każda liczba rzeczywista y mniejsza od x jest mniejsza od x^2.
h) Istnieją trzy różne liczby całkowite takie, że $a^b = b^c$.
i) Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest niewymierny.

Zad. 3 Wyznacz zbiory $\bigcup_{n\in I} A_n$ oraz $\bigcap_{n\in I} A_n$, jeżeli

a) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{N}$,
b) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{Z}$,
c) $A_n = (\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
d) $A_n = [2 + \frac{(-1)^n}{n}, 4 - \frac{(-1)^n}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
e) $A_n = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x \le n \cdot y\}$, $I = \mathbb{N}$.

Wskazówka: naszkicuj najpierw A_n dla paru wybranych n.

Zad. 4 Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ wyznacz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right)$$

a następnie

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right).$$

Zad. 5 Wykaż, że dla każdych rodzin zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ zachodzi

a) $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$,

b) $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$,

c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}$,

d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}$.

Wskazówka: posłuż się definicją i odpowiednim prawem rachunku kwantyfikatorów.

Pokaż, że nie zawsze zachodzi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}.$$

Zad. 6 (*) Załóżmy, że $k > n$ i danych jest k różnych niepustych podzbiorów A_1, A_2, ..., A_k zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Pokaż, że istnieją dwa rozłączne niepuste zbiory indeksów I, $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ takie, że

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Zad. 7 (*) Pokaż, że jeżeli $A_0 \supseteq A_1, \supseteq \ldots$ i $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots$, to

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$