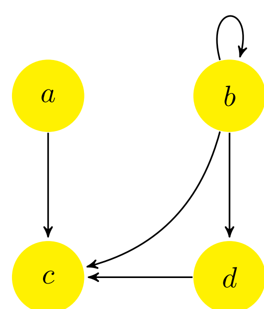
Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 1 (1) Znajdź z dokładnością do równoważności wszystkie schematy $\alpha(p,q)$ takie, że

$$(p \iff q) \wedge \alpha(p,q)$$

jest tautologią.

Zad. 2 (4) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a,b,c,d\}$ ma następujący diagram:



Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania (lub zaznacz, że ich nie ma):

a) $\forall y\ (x\mathsf{R}y \implies y\mathsf{R}x)$:

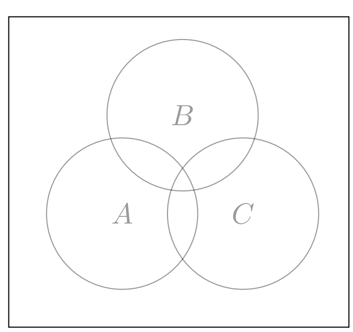
b) $\forall y\ (y\mathsf{R}x \implies \exists z(y\mathsf{R}z \wedge \neg z\mathsf{R}x)$:

c) $\exists y\ \forall z\ (x\mathsf{R}y \iff x\mathsf{R}z)$:

Czy relacja R jest przechodnia?

Zad. 3 (1) Zaznacz na diagramie Venna kontur zbioru

$$\{x \in X \colon x \in A \iff x \in B\}$$



Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 4 (4) Niech $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie dana wzorem

$$f(A) = \mathbb{N} \setminus A.$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $f[\{\mathbb{N}, \{n\colon n > 10\}\}]$.

Zad. 5 (2) Dla $t \in \mathbb{R}$ niech

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}\colon \sin x = t\}.$$

a) Wyznacz

$$\bigcup_{r>0} A_r =$$

b) Wyznacz

$$\bigcap_{r\in[0,1]} A_r =$$

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 6 (4) Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

a) Czy jest to zbiór uporządkowany liniowo? Odpowiedź uzasadnij.

b) Znajdź supremum zbioru $\mathcal{B}$, gdzie

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} \colon |A| < 5\},$$

lub wykaż, że ono nie istnieje.

c) Ile elementów maksymalnych ma zbiór $\mathcal{B}$ z poprzedniego podpunktu? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 7 (2) Na $\mathbb{R}^2$ mamy dany porządek $\preceq$ dany wzorem

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle x', y'\rangle \iff (x \leq x' \wedge y \leq y').$$

Wskaż zbiory A, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ równoliczne z $\mathbb{R}$ i takie, że żaden element zbioru A nie jest porównywalny z żadnym elementem zbioru B.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 8 (1) Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{Q}$, o której wiemy, że

$$\exists x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q}\ (\forall z \in \mathbb{Q}\ (z \sim x \vee z \sim y)) \wedge \neg(x \sim y).$$

Co możemy powiedzieć o mocy zbioru $X/_{\sim}$?

Zad. 9 (5) Na $\mathbb{N}$ definiujemy dwie relacje równoważności:

- $n \sim m$, jeśli n i m mają (w zapisie dziesiętnym) taką samą liczbę cyfr.
- $n \cong m$, jeśli $7|(n-m)$.

a) Ile elementów ma $[113]_{\sim}$? Odpowiedź uzasadnij.

b) Ile klas abstrakcji ma $\cong$? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $[0]_{\mathsf{R}}$, gdzie R jest relacją równoważności na $\mathbb{N}$ zdefiniowaną przez

$$n \mathsf{R} m \iff \exists k\ (n \sim k \wedge k \cong m).$$

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 10 (0,5) Podaj przykład zbioru nieprzeliczalnego, który nie jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Zad. 11 (1) Podaj przykład elementu zbioru $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$.

Zad. 12 (1,5) Jaka jest moc zbioru $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{0, 1\}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 13 (3) Udowodnij twierdzenie Cantora ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$ dla każdego zbioru A)