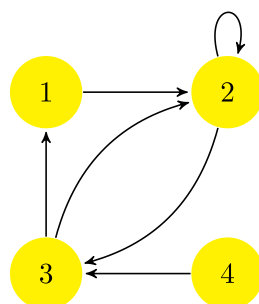
Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 1 (2) Napisz schemat zdaniowy równoważny schematowi

$$(p \wedge (q \vee \neg p)) \vee r$$

bez użycia spójników $\wedge$ i $\vee$.

Zad. 2 (3) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ ma następujący diagram:



Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania (lub zaznacz, że ich nie ma):

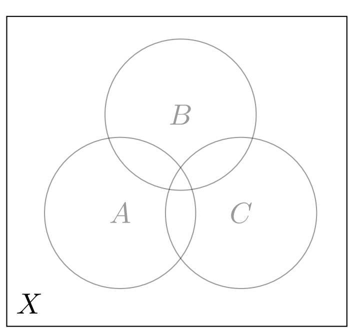
a) $\forall y \; ((x\mathsf{R}y \wedge y\mathsf{R}x) \implies x = y)$:

b) $\exists y \; \exists z \; (x\mathsf{R}y \wedge y\mathsf{R}z \wedge z\mathsf{R}x)$:

c) $\exists y \; \exists k \in \mathbb{Z}(y = 2k \wedge x\mathsf{R}y)$:

Zad. 3 (1) Zaznacz na diagramie Venna kontur zbioru

$$\{x \in X \colon (x \in A \implies x \in B) \implies (x \in C)\}$$



Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 4 (1) Zapisz za pomocą sumy uogólnionej zbiór

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \operatorname{tg}(2x) < 1\}.$$

Zad. 5 (1) Podaj przykład funkcji $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest „na”.

Zad. 6 (2) Czy istnieje funkcja $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest różnowartościowa? Odpowiedź krótko uzasadnij, posługując się twierdzeniami z wykładu.

Zad. 7 (2) Niech $f \colon X \to Y$, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Podaj definicje

- obrazu zbioru A przez funkcję f,

- przeciwobrazu zbioru B przez funkcję f.

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 8 (4) Rozważmy zbiór wszystkich domkniętych przedziałów na $\mathbb{R}$ (a więc zbiorów postaci $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$, gdzie $a \leq b$) częściowo uporządkowany przez relację $\subseteq$.

a) Czy jest to zbiór liniowo uporządkowany? Odpowiedź uzasadnij.

b) Podaj przykład nieskończonego łańcucha w tym porządku.

c) Podaj przykłady elementu minimalnego i maksymalnego w tym porządku (lub, w przypadku nieistnienia któregoś z nich, uzasadnij to).

Zad. 9 (2) Na zbiorze domkniętych przedziałów na $\mathbb{R}$ zdefiniujmy relację:

$$[a, b] \preceq [c, d] \iff (b - a) \leq (d - c).$$

Czy jest to relacja częściowego porządku?

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 10 (4) Na $\mathbb{R}^2$ definiujemy relację równoważności wzorem:

$$\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle \quad \iff \quad \max(x, y) = \max(x', y')$$

a) Zaznacz w układzie współrzędnych elementy klasy abstrakcji $[\langle 2, 3\rangle]_\sim$.

b) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji? Odpowiedź uzasadnij.

c) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathbb{R}^2/_\sim$? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 11 (2) Podaj przykład relacji na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, która jest zwrotna, symetryczna, ale nie jest relacją równoważności. (Wystarczy naszkicować diagram takiej relacji.)

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 12 (1) Sformułuuj Hipotezę Continuum.

Zad. 13 (2) Niech $K \subseteq \mathbb{R}^2$ oznacza zbiór punktów pewnego koła, a $P \subseteq \mathbb{R}^2$ zbiór punktów pewnego prostokąta. Jakiej mocy może być zbiór $K \cup P$? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 14 (3) Udowodnij, że zbiór $\mathbb{Q}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$.