Część 1, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

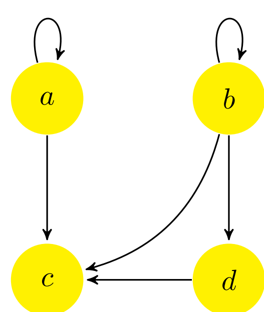
Zad. 1 (4) Mamy daną relację równoważności $\cong$ na zbiorze $\mathbb{R}$, ciąg (a_n) liczb rzeczywistych oraz funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisz poniższe zdania symbolicznie.
Funkcja f jest różnowartościowa, ale nie jest „na".

Relacja $\cong$ ma co najwyżej dwie klasy abstrakcji.

Ciąg (a_n) ma nieskończenie wiele wyrazów będących liczbami całkowitymi.

Każda liczba rzeczywista większa od π i będąca w relacji $\cong$ z 5 jest wartością funkcji f.

Zad. 2 (4) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ ma następujący diagram:



Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania ($|A|$ oznacza tutaj liczbę elementów zbioru A). Jeśli nie ma takich elementów, zaznacz to wyraźnie.

a) $\exists y\ \exists z\ \big((x\mathsf{R}y) \land (x\mathsf{R}z) \land (y \neq z)\big)$:

b) $|\{y\colon y\mathsf{R}x\}| > 2$:

c) $\forall y\ (y\mathsf{R}x \implies \exists z(z\mathsf{R}y))$:

d) $\forall y\ \exists z\ x\mathsf{R}z \land z\mathsf{R}y$:

Część 2, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 3 (1) Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest różnowartościowa, ale nie jest „na".

Zad. 4 (3) Podaj przykład relacji równoważności $\sim$ na zbiorze $\mathbb{N}$, takiej, że łącznie spełnione są następujące warunki:

- $1 \sim 2$,
- $\neg(2 \sim 3)$,
- $\sim$ ma trzy klasy abstrakcji.

Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 5 (4) Na zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowano relację równoważności $\sim$:

$$\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle \iff x - y = x' - y'$$

Wyznacz klasę abstrakcji $[\langle 2, 3\rangle]_{\sim}$.

Wyznacz zbiór ilorazowy $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})_{/\sim}$.

Część 3, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 6 (2) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

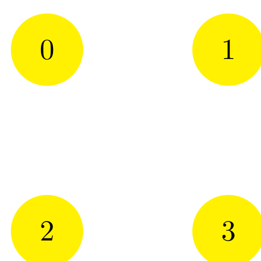
$$f(x) = \sin x.$$

Podaj następujące zbiory. Tam, gdzie to konieczne użyj sumy uogólnionej.

$f\big[[0,\pi)\big] =$

$f^{-1}\big[[\frac{\sqrt{2}}{2},1]\big] =$

Zad. 7 (3) Narysuj diagram relacji R na zbiorze $\{0,1,2,3\}$, takiej, że $0R1$, R jest symetryczna, przechodnia, ale nie jest zwrotna.



Zad. 8 (4) Podaj przykład relacji R na zbiorze $\mathbb{R}$, która jest zarówno funkcją, jak i relacją równoważności. Uzasadnij, że jest tylko jedna taka relacja.

BRUDNOPIS: