

---

## WdM - zadania na majówkę

---

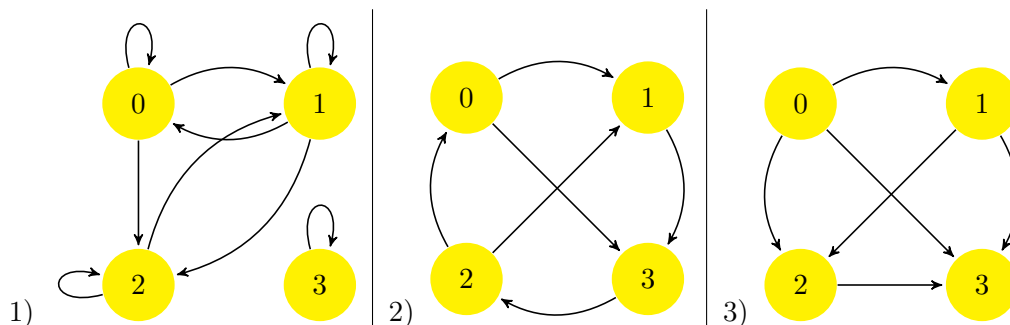
Kolokwium odbędzie się w trakcie ćwiczeń 5 maja i potrwa 60 minut. Po kolokwium odbędzie się omówienie zadań z kolokwium. Obowiązuje materiał z wykładów (list) 1–7.

**Zad. 1** Zdefiniuj (wzorem) dowolną funkcję

$$f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}).$$

Spróbuj zdefiniować kilka takich funkcji. (Uwaga: funkcja nie musi być “na” ani różnowartościowa.)

**Zad. 2** Rozważmy relację  $R$  na zbiorze  $\{0, 1, 2, 3\}$  o poniższym diagramie.



W każdym z powyższych przypadków sprawdź prawdziwość następujących zdań:

- $\exists x, y, z \ xRy \wedge xRz \wedge y \neq z,$
- $\exists x \forall y \ ((x \neq y \wedge xRy) \implies (\exists z(z \neq x \wedge yRz))),$
- $\{(x, y) : xRy\} \subseteq \{(x, y) : yRx\},$
- $\{(x, y) : xRy\} \cap \{(x, y) : yRx\} = \emptyset,$
- $\forall x \exists y \ x < y \wedge \neg(xRy).$

W każdym przypadku wypisz wszystkie liczby  $x$  takie, że

$$\exists y \ xRy \wedge \forall z((y \neq z \wedge xRz) \implies yRz).$$

Czy którąś z powyższych relacji potrafisz zapisać prostym wzorem?

**Zad. 3** Naskicuj wykresy poniższych funkcji zdaniowych (o zakresie zmienności  $\mathbb{R}$ ):

- $p(x) = \exists y \exists z \ |x| + |y| + |z| > 1,$
- $p(x, y) = \exists z \ |x| + |y| + |z| > 1,$
- $p(x, y, z) = |x| + |y| + |z| > 1.$

Jaki sens ma pytanie o wykres

- $p = \exists x \exists y \exists z \ |x| + |y| + |z| > 1?$

Dlaczego prośba o naskicowanie wykresu funkcji zdaniowej o czterech zmiennych byłaby złośliwa?

**Zad. 4** Niech  $\mathbb{P}$  będzie zbiorem liczb pierwszych. Na  $\mathbb{N}^+$  rozważamy relację równoważności

$$n \sim m \iff \forall p \in \mathbb{P}(p|n \iff p|m).$$

- a) Czy  $[10]_{\sim} \subseteq [15]_{\sim}$ ?
- b) Wyznacz  $[6]_{\sim}$ .
- c) Ile jest skończonych klas abstrakcji relacji  $\sim$ ?

**Zad. 5** Zapisz zbiór rozwiązań nierówności  $\sin(x) < \sqrt{3}/2$  za pomocą sumy uogólnionej odpowiednich zbiorów.

**Zad. 6** Przemyśl, co ma ze sobą wspólnego funkcja zdaniowa dwóch zmiennych o zakresie zmienności  $X$  z relacją na zbiorze  $X$ .

**Zad. 7** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją. Zdefiniujmy relację  $R$  na  $\mathbb{R}$  wzorem:

$$xRy \iff y = f(x).$$

Niech  $D$  będzie wykresem relacji  $R$ .

- a) Naszkicuj  $D$  dla funkcji  $f(x) = \cos x$ .
- b) Co możemy powiedzieć o funkcji  $f$ , jeśli wiemy, że  $\pi^{\mathbb{R}}[D] = \mathbb{R}$ ?
- c) Wykaż, że  $D_x$  ma dokładnie jeden element dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .
- d) Co możemy powiedzieć o funkcji  $f$ , jeśli wiemy, że  $D^y$  ma co najwyżej jeden element dla każdego  $y \in \mathbb{R}$ ?

### Parę ogólnych uwag.

- a) Upewnij się, że znasz (i rozumiesz) wszystkie definicje, które pojawiły się na wykładzie; zwłaszcza te często używane.
- b) Upewnij się, że potrafisz zrobić zadania z list 5–8. Upewnianie się nie powinno polegać na zerknięciu do rozwiązania, lecz na próbie ich ponownego rozwiązania.
- c) Nie koncentruj się na trudniejszych zadaniach, jeśli masz kłopoty z łatwiejszymi. W szczególności odnosi się to do zapisywania w sposób symboliczny zadanych zdań i funkcji zdaniowych. Upewnij się najpierw, że potrafisz zapisać proste funkcje zdaniowe, np. “ $x|y$ ”, “ $n$  jest liczbą pierwszą”, itp., a dopiero później atakuj bardziej skomplikowane przykłady.
- d) Jeśli zabierzesz się za rozwiązywanie zadania bez pełnego rozumienia jego treści, najprawdopodobniej zrobisz je źle. Jeśli natomiast dokładnie zrozumiesz treść zadania, to często okazuje się, że rozwiązanie jest bardzo proste. Dlatego warto dokładnie zapoznać się z treścią zadania i zastanowić się, o co właściwie nas w nim proszą.
- e) Jeśli masz dostęp do poprawnego rozwiązania danego zadania, zajrzyj do niego dopiero w ostateczności - po tym, jak zrozumiesz jego treść i podejmiesz parę prób jego zrobienia. Pamiętaj, że czasami łatwiej jest samemu zrobić zadanie niż zrozumieć cudze rozwiązanie (a na pewno jest to o wiele bardziej kształćące).
- f) W wielu wypadkach pomaga wykonanie rysunku pomocniczego (choć, niestety, nie zawsze). Nie bój się rysować.
- g) Jeśli chcesz znaleźć przykład (funkcji, relacji, porządku), nie zawsze musi on być zdefiniowany “wzorem”. Np. porządek możesz zdefiniować za pomocą diagramu Hassego, funkcję za pomocą wykresu, itd. Musisz tylko zadbać, by Twój opis był wystarczająco dokładny.