# WdM A - zadania przed 3. kolokwium

Kolokwium odbędzie się w trakcie ćwiczeń 9 czerwca i potrwa 60 minut.

**Zad. 1** Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Zdefiniujmy relację na $X$ wzorem

$$x \mathsf{R} y \iff x \text{ i } y \text{ są porównywalne względem } \leq .$$

Czy to relacja zwrotna? Słabo antysymetryczna? Symetryczna? Przechodnia? Ja wygląda ta relacja, jeśli $(X, \leq)$ jest liniowo uporządkowany? Narysuj diagram tej relacji dla

$$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, |).$$

**Zad. 2** Udowodnij, że w zbiorze liniowo uporządkowanym każdy skończony niepusty zbiór ma element największy i najmniejszy. Pokaż, że założenie skończoności jest istotne. Pokaż, że założenie liniowości jest istotne.

**Zad. 3** Rozważmy następującą relację częściowego porządku na ciągach liczb naturalnych $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \forall n\ a_n \leq b_n,$$

przy czym „$\leq$" jest standardowym porządkiem na liczbach naturalnych.

- Wyznacz zbiór elementów porównywalnych z $(a_n)$ danym wzorem $a_n = n$.
- Czy $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq)$ ma element największy? Najmniejszy?

**Zad. 4** Rozważmy relację $\sim$ na $\mathbb{R}$ daną wzorem

$$x \sim y \iff \sin(x) = \sin(y).$$

Jaka jest moc $[0]_{\sim}$? Jaka jest moc $\mathbb{R}_{/\sim}$?

**Zad. 5** Podaj przykład relacji równoważności na $\mathbb{R}$, która ma przeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji.

**Zad. 6** Podaj przykład relacji równoważności na $\mathbb{R}$, która ma nieprzeliczalnie wiele przeliczalnych klas abstrakcji.

**Zad. 7** Podaj przykład relacji równoważności na $\mathbb{R}^2$, która ma nieprzeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji.

**Zad. 8** Podaj przykład relacji równoważności na $\mathbb{R}$, która ma nieprzeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji. (Wskazówka: użyj poprzedniego zadania).

**Zad. 9** Jakiej mocy jest zbiór $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

**Zad. 10** Czy jeśli $|A| = |B| = |A \triangle B| = \aleph_0$, to $|A \cap B| < \aleph_0$?

**Zad. 11** Czy jeśli $|A| < |B|$, to $|A \times C| < |B \times C|$?

**Zad. 12** Czy jeśli $|A| < |B|$ i $C \cap A = C \cap B = \emptyset$, to $|A \cup C| < |B \cup C|$?

**Zad. 13** Pokaż, że zbiór $\{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \colon \forall n\ f(2n) = 0\}$ jest mocy $\mathfrak{c}$.

**Zad. 14** Zbiory $A$ i $B$ są przeliczalne, a zbiór $A \setminus B$ jest nieskończony. Opisz, co dokładnie można wywnioskować o mocach zbiorów $A$ i $B$.