WdM - Lista 10 (ćwiczenia 2 VI 2017)

Zad. 1 Jak dużej mocy może być rodzina podzbiorów $\mathbb{N}$, które są parami rozłączne? A rodzina podzbiorów $\mathbb{R}$, które są parami rozłączne?

Zad. 2 Niech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jakiej mocy może być zbiór $f[\mathbb{N}]$?

Zad. 3 Udowodnij, że rodzina skończonych podzbiorów zbioru przeliczalnego jest przeliczalna.

Zad. 4 Pokaż, że następujące zbiory są przeliczalne:

a) Zbiór punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych wymiernych.
b) Zbiór parami rozłącznych trójkątów na płaszczyźnie.
c) Zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych (wskazówka: użyj zadania 3).
d) Zbiór liczb algebraicznych (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu).

Które z nich są mocy $\aleph_0$?

Zad. 5 Pokaż, że następujące zbiory są nieprzeliczalne:

a) Zbiór liczb niewymiernych.
b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb pierwszych.
c) Zbiór punktów wykresu funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sin(x)$.
d) Zbiór wszystkich punktów kuli o promieniu 1.
e) Zbiór wszystkich podzbiorów kuli o promieniu 1.
f) Zbiór $\{A \subseteq \mathbb{Z}\colon \mathbb{N} \subseteq A\}$.

Jakiej mocy są powyższe zbiory?

Zad. 6 Podaj przykład 4 zbiorów nieskończonych o różnych mocach.

Zad. 7 Wyjaśnij błąd w następującym rozumowaniu: *Zbiór liczb niewymiernych jest mocy $\mathfrak{c}$, ponieważ wiemy, że jest on nieprzeliczalny, a z drugiej strony nie może być mocy większej niż $\mathfrak{c}$.* (Uwaga: choć rozumowanie zawiera lukę, to zbiór liczb niewymiernych naprawdę jest mocy $\mathfrak{c}$).

Zad. 8 Wykaż, że $\mathcal{P}(A)$ nigdy nie jest mocy $\aleph_0$ (niezależnie od tego, czym jest zbiór A).

Zad. 9 (*) Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są ciągłe, jest mocy $\mathfrak{c}$, a zbiór wszystkich, niekoniecznie ciągłych, funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma moc większą niż $\mathfrak{c}$.

Zad. 10 (*) Pokaż, że istnieje rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ taka, że $A \cap B$ jest skończona dla różnych $A, B \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ jest mocy $\mathfrak{c}$.