
WdM A - Lista 2 (ćwiczenia 10 III 2017)

Ćw. 1 O liczbie rzeczywistej x wiadomo, że jeśli $x \leq 5$, to $x > 3$. Czy stąd wynika, że $x > 3$? Czy wynika, że $x \leq 5$?

Ćw. 2 O liczbie naturalnej n wiemy, że

- a) jeśli n jest podzielne przez 3 lub jest podzielne przez 4, to n jest podzielne przez 12 oraz
- b) jeśli n jest podzielne przez 3, to nie dzieli się przez 2.

Czy stąd wynika, że n nie dzieli się przez 3?

Zad. 3 O liczbie rzeczywistej x wiemy, że

- a) jeśli $x > 0$, to $x > 5$, o ile $x > 3$ oraz
- b) jeśli $x \leq 5$, to $x > 0$.

Czy stąd wynika, że $x > 3$?

Zad. 4 (Zadanie Lewisa Carrolla) O moich dzieciach wiadomo, że

- a) wszyscy moi synowie są szczupli,
- b) wszystkie moje zdrowe dzieci uprawiają sport,
- c) żadne moje dziecko, które jest łakomczuchem, nie jest szczupłe,
- d) żadna moja córka nie uprawia sportu.

Czy z tego wynika, że żadne moje zdrowe dziecko nie jest łakomczuchem?

Ćw. 5 Ile jest (z dokładnością do równoważności) formuł o trzech zmiennych? A ile jest tautologii o trzech zmiennych?

Zad. 6 Podaj przykład formuły logicznej $\alpha(p, q, r)$ o poniższej tabelce wartości logicznych:

p	q	r	$\alpha(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- a) Ile jest takich formuł?
- b) Ile ich jest z dokładnością do równoważności?

Zad. 7 Zdefiniuj alternatywę i koniunkcję przy pomocy implikacji i negacji. Następnie przeformułuj odpowiednio zdania *Lubię ciastka i lody* oraz *Na wakacje pojedę nad morze lub w góry*. Zapisz formułę z poprzedniego zadania przy pomocy negacji i implikacji.

Zad. 8 Zapisz poniższe formuły nie używając znaku negacji, równoważności ani implikacji (w razie potrzeby używając podstawień $p' = \neg p$, $q' = \neg q$ i $r' = \neg r$)

- a) $\neg(p \vee (\neg q \wedge r))$,
- b) $p \implies (q \implies r)$,
- c) $\neg(p \implies (p \vee r))$,
- d) $p \iff (q \iff r)$,
- e) $(p \implies q) \implies (r \implies p)$.

Zad. 9 Znajdź wszystkie formuły (z dokładnością do równoważności) $\alpha(p, q)$, dla których $p \vee q \implies \alpha(p, q)$ jest tautologią. Podobnie dla $p \wedge q \implies \alpha(p, q)$.

Zad. 10 (*) Pokaż, że za pomocą koniunkcji i alternatywy nie da się zdefiniować implikacji.

Zad. 11 Kreską Sheffera nazywamy spójnik o następującej tabelce wartości logicznych:

p	q	$p q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- a) Zdefiniuj kreskę Sheffera przy pomocy negacji i koniunkcji. Zdefiniuj negację przy pomocy kreski Sheffera.
- b) (*) Pokaż, że za pomocą kreski Sheffera można zdefiniować wszystkie formuły logiczne (wskazówka: użyj pewnego twierdzenia z wykładu).
- c) (*) Pokaż, że spójnik zdefiniowany formułą $\neg(p|q)$ ma podobną własność i że są te jedyne dwa spójniki dwuargumentowe o tej własności.

Zad. 12 Mamy dane funkcje zdaniowe $p(n) = "3|n"$, $q(n) = "2|n"$, $r(n) = "n \text{ jest liczbą pierwszą}"$, $s(n) = "n \in [8, 17]"$. Dla których liczb $n \in \{0, 1, \dots, 25\}$ poniższe zdania są prawdziwe?

- a) $\neg p(n) \implies s(n)$,
- b) $q(n) \iff r(n)$,
- c) $(p(n) \vee q(n)) \wedge r(n)$,
- d) $\neg s(n) \implies (p(n) \vee q(n))$,
- e) $(p(n) \vee \neg q(n)) \implies (p(n) \implies s(n))$.

Zad. 13 Dla każdego z poniższych zbiorów wymyśl funkcję zdaniową $p(n)$, która "wytnie" go ze zbioru $\{0, 1, \dots, 50\}$. Postaraj się, żeby zapisać $p(n)$ w postaci prostych funkcji zdaniowych połączonych spójnikami logicznymi. Nie używaj symbolu " \in " (możesz np. używać symboli „|”, „ \leq ” itp.).

- a) $\{9, 18, 27, 36\}$,
- b) $\{6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46\}$,
- c) $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- d) $\{3, 17, 48\}$,
- e) $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 44\}$,