
WdM - Lista 4 (ćwiczenia 24 III 2017)

Zad. 1 Niech A, B będą zbiorami. Znajdź wszystkie zbiory X , że

$$A \times X = X \times B.$$

Ćw. 2 Wypisz wszystkie elementy $\mathcal{P}(\{1, 2\} \times \{5\})$.

Ćw. 3 Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\})$?

Ćw. 4 Produkt $A \times B$ jest 6-elementowy, a wśród jego elementów znajdują się $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$ i $\langle 3, 3 \rangle$. Znajdź $B \times A$.

Zad. 5 Niech $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Zapisz $(A \times B)^c$ jako sumę produktów kartezjańskich.

Zad. 6 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory A i B , będące rozłącznymi podzbiorem $[0, 1] \times [0, 1]$ takimi, że

$$\pi_X[A] = \pi_X[B] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] = \pi^Y[A] = \pi^Y[B].$$

Zad. 7 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór A , który ma 5 elementów i taki, że $\pi_X[A]$ ma 2 elementy a $\pi^Y[A]$ jest zbiorem 3-elementowym.

Zad. 8 Zapisz funkcję zdaniową równoważną funkcji

$$\langle x, y \rangle \notin (A \cup B) \times (C \setminus D)$$

bez używania symboli mnogościowych (\cup , \setminus , \times , itd.)

Zad. 9 Załóżmy, że A, B, C i D są niepustymi zbiorami.

- Pokaż, że jeśli $A \times B = C \times D$, to $A = C$ i $B = D$.
- Czy z tego, że $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$ wynika, że $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap D = \emptyset$?
- Czy z tego, że $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ wynika, że $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$?

Czy założenie niepustości jest potrzebne?

Zad. 10 Naszkicuj w układzie współrzędnych $A \times B$ i $B \times A$, jeśli

- $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$,
- $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : (0 < x < 1) \vee (3 < x < 4)\}$,
- $A = \{x \in \mathbb{R} : (-1 \leq x < 1) \vee (2 < x \leq 3)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : (0 < x < 1) \vee (3 < x \leq 4)\}$,
- $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$,
- $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}$.

Zad. 11 Naszkicuj w układzie współrzędnych wykresy następujących funkcji zdaniowych:

- $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$,
- $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{x}\}$,
- $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x = \sin y\}$,
- $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje } t \text{ takie, że } x \cdot t = y\}$,

- e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 = y \vee 4x = 3y\}$,
- f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \implies y = 4x\}$,
- g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \iff y = 4x\}$,

W każdym wypadku znajdź rzuty tych wykresów oraz ich cięcia w wybranych punktach.

Ćw. 12 Niech $A \subseteq X \times Y$ będzie wykresem funkcji zdaniowej $p(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Uzupełnij

- $\pi_X[A] = X$, jeśli dla każdego istnieje taki, że $p(x, y)$ jest prawdziwa,
- $\pi^Y[A] = Y$, jeśli dla każdego istnieje taki, że $p(x, y)$ jest prawdziwa,
-, jeśli dla każdego x i każdego y funkcja $p(x, y)$ jest prawdziwa,
-, jeśli dla żadnego x i y funkcja $p(x, y)$ nie jest prawdziwa.

Zad. 13 Niech $X = \{0, 1, \dots, 9\}$. Zdefiniujmy $A \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ w następujący sposób:

$$\langle C, D \rangle \in A \iff C \subseteq D.$$

Znajdź rzuty A . Znajdź A_\emptyset , A^\emptyset , $A_{\{0,1,2,3,4,5\}}$ i $A^{\{0,1,2,3,4,5\}}$.

Zad. 14 (*) Jaką cechę ma wykres zbioru $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ w układzie współrzędnych, jeśli wiemy, że dla każdego $x \in [0, 1]$ zachodzi $A_x = A^x$?

Zad. 15 (*) O zbiorze $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ wiemy, że $A_x = [0, \sqrt{x}]$ dla każdego $x \in [0, 1]$. Podaj A^y dla $y \in [0, 1]$.