
WdM A - Lista 5a (konwersatoria)

Uwaga. Ta lista jest przeznaczona do pracy własnej i będzie omawiana wyłącznie na konwersatoriach. Nie będzie ona obowiązywać na żadnej kartkówce. Sumy i przekroje uogólnione pojawiają się jednak na kolokwiach i na egzaminie.

Zad. 1 Wyznacz zbiory $\bigcup_{n \in I} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in I} A_n$, jeżeli

- a) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{N}$,
- b) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{Z}$,
- c) $A_n = (\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- d) $A_n = [2 + \frac{(-1)^n}{n}, 4 - \frac{(-1)^n}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- e) $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq n \cdot y\}$, $I = \mathbb{N}$.

Wskazówka: naskicuj najpierw A_n dla paru wybranych n .

Zad. 2 Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ wyznacz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right)$$

a następnie

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right).$$

Zad. 3 Wykaż, że dla każdych rodzin zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(A_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ zachodzi

- a) $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$,
- b) $(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$,
- c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$,
- d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$.

Wskazówka: posłuż się definicją i odpowiednim prawem rachunku kwantyfikatorów.

Pokaż, że nie zawsze zachodzi

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}.$$

Zad. 4 (*) Załóżmy, że $k > n$ i danych jest k różnych niepustych podzbiorów A_1, A_2, \dots, A_k zbioru $\{1, \dots, n\}$. Pokaż, że istnieją dwa rozłączne niepuste zbiory indeksów $I, J \subseteq \{1, \dots, k\}$ takie, że

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Zad. 5 (*) Pokaż, że jeżeli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$ i $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$, to

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$