
WdM A - Lista 6 (ćwiczenia 21 IV 2017)

Ćw. 1 Które z poniższych funkcji są poprawnie określone? Które z nich są różnowartościowe, a które „na”? Które z nich są równe?

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$,
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$,
- c) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$,
- d) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = |x|^2$,
- e) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$,
- f) $f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), f(x) = x^2$,
- g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = x^2$,
- h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)(x + 2) - x + 2$.

Ćw. 2 Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \sin x + 1$. Wyznacz $f[[0, 3\pi/2]]$, $f[\{0, \pi\}]$, $f[\{2\}]$, $f^{-1}[(1/2, \infty)]$, $f^{-1}[(-1/2, 1/2)]$, $f^{-1}[\{0\}]$.

Ćw. 3 Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznacz $f[[0, 1]]$, $f[(-2, -1)]$, $f[\{0, 1\}]$, $f^{-1}[(-\infty, 1]]$.

Ćw. 4 Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Narysuj diagramy wybranych funkcji $f: X \rightarrow X$ i $g: X \rightarrow X$.

- a) Narysuj diagram funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g \circ g$.
- b) Jak wygląda diagram funkcji stałej?
- c) Jak wygląda diagram bijekcji?
- d) Spróbuj wymyślić przykład funkcji h takiej, że $h \circ h$ nie jest stała, ale $h \circ h \circ h$ już jest.

Zad. 5 Pokaż, że jeśli funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest bijekcją, a $g: Y \rightarrow X$ jest funkcją do niej odwrotną, to

$$f^{-1}[A] = g[A]$$

dla każdego $A \subseteq Y$.

Zad. 6 Sprawdź, czy podane funkcje są różnowartościowe i „na”.

- a) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n, k) = n + k$.
- b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g(n) = \langle 2n, -2n \rangle$.
- c) $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}, g(A) = \min A$.

Wyznacz obrazy tych funkcji. Dla każdej z funkcji znajdź nieskończony podzbiór dziedziny, na którym funkcja jest różnowartościowa.

Wyznacz $f[\{0, 1, 2\} \times \{-2, 0\}]$, $f^{-1}[\{2\}]$, $g[\{0, 2, 4\}]$, $g^{-1}[\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}]$, $h[\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})]$, $h^{-1}[\{3\}]$ (o ile to możliwe).

Zad. 7 Określamy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dla } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Naszkiuj wykres $f \circ f$. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy względem f i $f \circ f$ zbiorów $[0, 1)$ i $[-1, 0)$.

Zad. 8 Niech $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$. Wykaż, że jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa, a f jest “na”, to g jest różnowartościowa. (Wskazówka: narysuj diagramy funkcji f i g .)

Zad. 9 Niech $f: X \rightarrow Y$ i $A \subseteq X$. Pokaż, że $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. Podaj przykład, kiedy nie zachodzi równość.

Zad. 10 Niech $f: X \rightarrow X$. Załóżmy, że dla każdego $A \subseteq X$ zachodzi $f[A] \subseteq A$. Pokaż, że wtedy $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$.

Zad. 11 Mamy dane funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zapisz symboliczne poniższe zdania.

- f jest ograniczona z dołu.
- f jest ograniczona.
- Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji f jest mniejsza od wartości funkcji g .
- Żadna wartość funkcji f nie jest miejscem zerowym funkcji g .
- Funkcja f jest niemalejąca na przedziale $[0, 1]$.

Zad. 12 Niech $f: X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq Y$. Udowodnij, że

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

Zad. 13 Niech A będzie podzbiorem zbioru X . Funkcja $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ zadana jest wzorem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

- Kiedy funkcja χ_A jest “na”?
- Pokaż, że $\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$.
- Pokaż, że $\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$.