
WdM - Lista 7 (ćwiczenia 28 IV 2017)

Ćw. 1 Zbiór X składa się z 2 kwiatków czerwonych, 3 niebieskich i jednego kwiatka czarnego. Rozważmy na X relację

$$x \sim y \iff x \text{ i } y \text{ są tego samego koloru.}$$

- a) Ile klas abstrakcji ma ta relacja?
- b) Jakie etykiety można w naturalny sposób związać z klasami abstrakcji?
- c) Niech $A \subseteq X$. Zapisz symbolicznie, używając symbolu " \sim ", zdanie "W zbiorze A nie ma dwóch kwiatków tego samego koloru".

Zad. 2 Podaj przykład relacji równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, która ma 3 klasy abstrakcji, w tym jedną, która ma 3 elementy.

Zad. 3 Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$?

Zad. 4 Sprawdź, że relacja na zbiorze \mathbb{R} zdefiniowana przez

$$x \sim y \iff \sin x = \sin y$$

jest relacją równoważności.

- a) Wyznacz $[0]_{\sim}$.
- b) Wyznacz $[1]_{\sim}$, a następnie sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz ten zbiór jeszcze raz, tym razem poprawnie.
- c) Jakie etykiety można w naturalny sposób związać z klasami abstrakcji tej relacji?
- d) Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 5 Na zbiorze \mathbb{R}^2 zdefiniowano relację \sim w następujący sposób:

$$\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle \iff x = x'.$$

- a) Upewnij się, że jest to relacja równoważności.
- b) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór $[\langle 2, 1 \rangle]_{\sim}$,
- c) Jaką mają postać inne klasy abstrakcji tej relacji?
- d) Jakie etykiety można w naturalny sposób związać z klasami abstrakcji?
- e) Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 6 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2$. Na zbiorze \mathbb{R} zdefiniowano relację \sim w następujący sposób:

$$x \sim y \iff f^{-1}[\{x\}] \text{ i } f^{-1}[\{y\}] \text{ mają tyle samo elementów.}$$

- Upewnij się, że jest to relacja równoważności.
- Wyznacz $[0]_{\sim}$, $[-1]_{\sim}$ i $[1]_{\sim}$.
- Ile klas abstrakcji ma ta relacja i jak im w naturalny sposób przypisać etykiety?

Zad. 7 Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniujemy relację \sim poprzez

$$A \sim B \iff A \setminus \{0, 1, 2\} = B \setminus \{0, 1, 2\}.$$

- Upewnij się, że jest to relacja równoważności.
- Wypisz elementy $[\emptyset]_{\sim}$.
- Wypisz elementy klasy abstrakcji zbioru liczb nieparzystych.

Zad. 8 Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniujemy relację \sim poprzez

$$A \sim B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ jest zbiorem skończonym.}$$

- Upewnij się, że jest to relacja równoważności.
- Wyznacz $[\emptyset]_{\sim}$.

Zad. 9 Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $A_k = [k, k+1)$. Zdefiniuj relację \sim na \mathbb{R} taką, że $\mathbb{R}/_{\sim} = \{A_k : k \in \mathbb{Z}\}$.