
WdM - Lista 8 (ćwiczenia 12 V 2017)

Ćw. 1 Zdefiniuj na podanych zbiorach 3 różne relacje częściowego porządku:

- a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- b) \mathbb{N} ,
- c) \mathbb{R} ,
- d) \mathbb{R}^2 .

Ćw. 2 Sprawdź, które z omówionych na wykładzie własności ma pusta relacja na zbiorze niepustym. A pusta relacja na zbiorze pustym?

Ćw. 3 Narysuj diagram Hassego relacji $(X, |)$, gdzie $X = \{5, 6, 10, 12, 15, 17\}$ (a $n|m$ jest relacją podzielności). Wskaż elementy minimalne i maksymalne. Czy istnieje element największy i najmniejszy? Wskaż kres górny i kres dolny zbioru X w częściowym porządku $(\mathbb{N}, |)$.

Ćw. 4 Narysuj diagram Hassego relacji $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, gdzie $X = \{0, 1, 2\}$. Wskaż elementy minimalne i maksymalne. Czy istnieje element największy i najmniejszy? Wskaż kres górny i kres dolny zbioru $\mathcal{P}(X)$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Zad. 5 Zdefiniujmy częściowy porządek (\mathbb{R}^2, \leq) poprzez

$$\langle x, y \rangle \leq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

- a) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów porównywalnych z $\langle 1, 2 \rangle$.
- b) Wyznacz kres górny zbioru $\{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\}$.
- c) Naszkicuj zbiór D , który ma jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego.

Czy relacja na \mathbb{R}^2 zdefiniowana wzorem

$$\langle x, y \rangle \sqsubseteq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \geq y'$$

jest relacją częściowego porządku? Jeśli tak, to powtórz dla niej powyższe polecenia.

Powtórz powyższe polecenia dla relacji zdefiniowanej przez

$$\langle x, y \rangle \leq_{lex} \langle x', y' \rangle \iff (x < x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')).$$

Zad. 6 Narysuj diagram Hassego takiego częściowego porządku (X, \leq) , że

- a) X ma 7 elementów, w tym dwa elementy maksymalne i 3 minimalne,
- b) X ma 3 elementy i trzy dwuelementowe łańcuchy,
- c) X ma nieskończenie wiele elementów i dokładnie dwa elementy maksymalne, w tym jeden minimalny.

W każdym wypadku znajdź $X \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $(X, |)$ ma odpowiedni diagram Hassego.

Zad. 7 Niech (X, \leq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, niech $A, B \subseteq X$ i $a, b \in X$. Zapisz symbolicznie poniższe zdania

- a) (X, \leq) jest liniowo uporządkowany,
- b) a jest ograniczeniem dolnym zbioru A ,
- c) a jest kresem dolnym zbioru A ,
- d) a jest elementem największym zbioru A ,
- e) A jest zbiorem elementów minimalnych B ,
- f) każdy element zbioru A ogranicza z dołu zbiór B ,
- g) a jest mniejsze od b i pomiędzy nimi istnieją co najmniej 2 różne elementy X .

Zapisz też negacje powyższych zdań, bez użycia symbolu negacji. Zamiast używać praw de Morgana, postaraj się raczej zrozumieć, co *znaczą* te zaprzeczenia.

Zad. 8 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zdefiniujmy relację R na \mathbb{R} poprzez

$$xRy \iff f(x) \leq f(y).$$

- a) Załóżmy, że R jest relacją częściowego porządku. Czy to oznacza, że f jest różnowartościowa?
- b) Załóżmy, że R jest relacją liniowego porządku. Czy to oznacza, że f jest “na”?

Zad. 9 Niech $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & \text{dla } x < 0, \\ 2x, & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Zdefiniujmy częściowy porządek \preceq na \mathbb{N} wzorem

$$n \preceq m \iff f^{-1}(n) \leq f^{-1}(m).$$

- a) Czy $7 \preceq 9$?
- b) Czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, który ma dwa różne elementy maksymalne?
- c) Podaj przykład zbioru B , który jest nieograniczony z dołu i takiego, że $\sup B = 4$.