

---

**WdM - Lista 9** (ćwiczenia 26 V 2017)

---

**Ćw. 1** Pokaż, że zbiór liczb wymiernych jest gęsty w liczbach rzeczywistych, tzn. dla każdego liczb rzeczywistych  $a, b$  takich, że  $a < b$  znajdziemy  $q \in \mathbb{Q}$  takie, że  $a < q < b$ . W szczególności  $\mathbb{Q} \cap (a, b) \neq \emptyset$  dla każdych  $a < b$ .

**Ćw. 2** Na rodzinie wszystkich podzbiorów  $\mathbb{N}$  określamy relację równoważności poprzez

$$A \sim B \iff A \text{ i } B \text{ są równoliczne.}$$

Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.

Pokaż, że relacja  $\preceq$  zdefiniowana przez

$$[A]_{\sim} \preceq [B]_{\sim} \iff |A| \leq |B|$$

jest relacją liniowego porządku na zbiorze ilorazowym  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$ . Wyznacz element najmniejszy i największy tego porządku.

**Zad. 3** Wskaż bijekcję między zbiorami  $A \times B$  i  $B \times A$ .

**Zad. 4** Wskaż bijekcje między zbiorami  $A$  i  $B$ .

- a)  $A = \{0, 3\}$  i  $B = \{1, 8\}$ .
- b)  $A$  - zbiór liczb naturalnych parzystych,  $B$  - zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- c)  $A$  - zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3,  $B$  - zbiór liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.
- d)  $A$  - trójkąt na płaszczyźnie,  $B$  - trójkąt do niego podobny.
- e)  $A = (0, \infty)$ ,  $B = \mathbb{R}$ .
- f)  $A = (1, \infty)$ ,  $B = \mathbb{R}$ .
- g)  $A$  - zbiór punktów okręgu na płaszczyźnie bez jednego punktu,  $B$  - zbiór punktów na prostej.

Uwaga: nie we wszystkich podpunktach trzeba definiować funkcję wzorem.

**Zad. 5** Korzystając z tego, że  $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  pokaż, że  $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Zad. 6** Wskaż bijekcję między zbiorem  $[0, 1) \cup [3, 4]$  a  $(0, 1] \cup (3, 4)$ .

**Zad. 7** Pokaż, że następujące zbiory są równoliczne:

- a) Zbiór punktów dowolnego kwadratu i zbiór punktów dowolnego trójkąta.
- b)  $(1, 2) \cup (4, 17)$  oraz  $(1, \infty)$ .

Uwaga: użyj twierdzeń Cantora-Bernsteina.

**Zad. 8** Pokaż, że następujące zbiory są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych:

- a) Zbiór parami rozłącznych przedziałów na prostej.
- b) Zbiór parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.