Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 1 (1) Podaj przykład formuły $\alpha(p,q)$ takiej, że ani $(\alpha(p,q) \vee q)$ ani $(\neg\alpha(p,q) \vee p)$ nie są tautologiami.

Zad. 2 (3) Mamy dany zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ i ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych. Zapisz symbolicznie poniższe zdania **nie** używając symboli $\cap$, $\emptyset$, $\{$, $\}$.

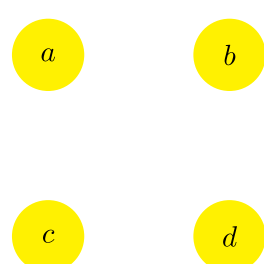
a) Zbiór A nie jest rozłączny ze zbiorem $\{1,2\}$.

b) Ciąg (a_n) ma co najwyżej dwa wyrazy większe od 3.

c) Nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) należy do zbioru A.

Zad. 3 (2) Na poniższym rysunki dorysuj strzałki tak, aby stał się on diagramem funkcji zdaniowej $\varphi(x,y)$ spełniającej łącznie obydwa poniższe warunki:

$$\exists x\ \forall y\ \varphi(x,y) \quad \text{oraz} \quad \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\varphi(x,y) \wedge \varphi(y,z)) \implies \neg\varphi(z,x)$$



Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 4 (5) Niech $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x,y)=\max(x,y)-\min(x,y).$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $f[[1,2)\times(2,3)]$.

d) Wyznacz $f^{-1}[\{1\}]$ (wystarczy poprawny rysunek).

Zad. 5 (1) Zapisz rozwiązanie nierówności $\sin(x)>0$ używając symbolu nieskończonej operacji na zbiorach.

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 6 (4) Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \preceq)$ (przypominam, że $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ to zbiór ciągów o wyrazach rzeczywistych), gdzie

$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \forall n\ a_n \leq b_n$$

a) Czy jest to zbiór uporządkowany liniowo? Odpowiedź uzasadnij.

b) Znajdź element największy zbioru $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

c) Niech $\mathbb{B}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów zbieżnych do 0. Czy $\mathbb{B}$ ma kres górny? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 7 (2) Czy relacja R na $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ dana wzorem

$$A \mathsf{R} B \iff \min A \leq \min B$$

jest częściowym porządkiem? Odpowiedź uzasadnij.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 8 (1) Mamy daną relację R na X. Co to znaczy, że R jest przechodnia?

Zad. 9 (1) Podaj przykład relacji równoważności $\sim$ na $\mathbb{Q}$ takiej, że $|\mathbb{Q}/_\sim| < |\mathbb{Q}|$.

Zad. 10 (4) Na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiujemy relację

$$A \sim B \iff (A \cap \{1,2\} = B \cap \{1,2\})$$

- Wykaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.
- Znajdź $[\emptyset]_\sim$.
- Ile elementów ma $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_\sim$?
- Ile elementów mają klasy abstrakcji $\sim$?

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 11 (3) Ile jest funkcji $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ postaci

$$a\ln(x) + b$$

gdzie a, $b \in \mathbb{R}$? Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

Zad. 12 (3) Niech $A = \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$.

a) Podaj przykład trzech różnych elementów A.

b) Ile elementów ma zbiór A? Odpowiedź uzasadnij.