Część 1, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 1 (5) Mamy daną relację R na zbiorze $\mathbb{R}$ oraz funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisz poniższe zdania symbolicznie przy użyciu kwantyfikatorów. **Zakazane** symbole: $\{$, $\}$, $|$, $\emptyset$, f^{-1}, ∞.

Funkcja f nie jest różnowartościowa.

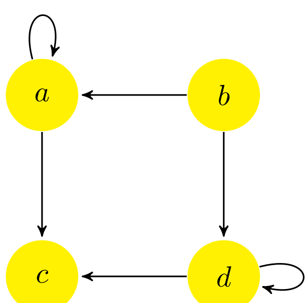
Relacja R nie jest przechodnia.

Przeciwobraz zbioru $(2, \infty)$ przez funkcję f jest niepusty.

Funkcja f świadczy o tym, że R jest relacją równoważności.

Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.

Zad. 2 (4) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ ma następujący diagram:



Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania. Jeśli nie ma takich elementów, zaznacz to wyraźnie.

a) $\exists y\ \exists z\ \big((x\mathsf{R}y) \land (x\mathsf{R}z) \land (y \neq z)\big)$:

b) $\forall y\ (x\mathsf{R}y \implies \neg y\mathsf{R}x)$:

c) $\forall y\ (y\mathsf{R}y \implies \exists z\ z\mathsf{R}y \land x\mathsf{R}z)$:

d) $\forall y\ (y\mathsf{R}a \implies y\mathsf{R}x)$:

Część 2, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 3 (3) Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze X i niech $a, b \in X$. Wykaż, że jeżeli $[a]_\sim \neq [b]_\sim$, to $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$.

Zad. 4 (4) Na $\mathbb{R}^2$ definiujemy następującą relację równoważności:

$$\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle \iff \text{odległości } \langle x, y\rangle \text{ i } \langle x', y'\rangle \text{ od prostej } y = x \text{ są takie same.}$$

a) Naszkicuj w układzie współrzędnych $[\langle 1, 0\rangle]_\sim$.

b) Podaj funkcję świadczącą o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności.

c) Opisz $\mathbb{R}^2_{/\sim}$.

Część 3, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 5 (3) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \cos x.$$

Opisz następujące zbiory. Tam, gdzie to konieczne użyj sumy uogólnionej.

$f\big[\{0\}\big] =$

$f^{-1}\big[[0,\infty)\big] =$

Zad. 6 (3) Sprawdź, czy funkcja $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dana wzorem

$$f(A,B) = A \cap B$$

jest różnowartościowa i czy jest „na“. Odpowiedzi uzasadnij.

Zad. 7 (3) Podaj przykład relacji równoważności na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, która ma dokładnie dwie klasy abstrakcji.