
Część 1, Kolokwium 3 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 1 (1) Podaj definicję kresu górnego w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leq)$.

Zad. 2 (5) Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{R}^2, \preceq)$, gdzie

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

Poniższe polecenia dotyczą porządku $\preceq$. Przykłady można podawać za pomocą (dobrze opisanych) rysunków.

a) Podaj przykład podzbioru $\mathbb{R}^2$, który ma dokładnie 3 elementy maksymalne i 2 minimalne.

b) Podaj przykład podzbioru $\mathbb{R}^2$, który ma nieprzeliczalnie wiele elementów parami nieporównywalnych, ale którego wszystkie elementy są porównywalne z $\langle 1, 1 \rangle$.

Zad. 3 (2) Podaj przykład zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leq)$, który **spełnia obydwa** poniższe warunki:

$$\forall x \exists y \neg(x \leq y \vee y \leq x)$$

$$\forall x \exists y (y \leq x \wedge x \neq y).$$

Część 2, Kolokwium 3 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 4 (1) Sformułuj twierdzenie Cantora-Bernsteina (w dowolnej wersji).

Zad. 5 (1) Kiedy zachodzi $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$?

Zad. 6 (7) Podaj moc poniższych zbiorów (bez uzasadnienia).

- $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.
- Zbiór punktów paraboli $y = x^2$.
- Zbiór wszystkich prostych w $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
- $[0, 1] \cup \{x^2 - \log_3 x + \sin x : x > 0\}$.
- $\{(-\infty, r) \cap \mathbb{Q} : r \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$.

Część 3, Kolokwium 3 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 7 (3) Pokaż, że jeżeli zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leq)$ ma element największy x , to x jest jedynym elementem maksymalnym.

Zad. 8 (3) Pokaż, że zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych jest przeliczalny.

Zad. 9 (2) Czy istnieje częściowy porządek $\leq$ na $\mathbb{R}$ taki, że zbiory

$$P_r = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest porównywalne z } r\} \text{ i } N_r = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest nieporównywalne z } r\}$$

są nieprzeliczalne dla każdego $r \in \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.