WdM - Lista 5a (dodatkowa) (4 IV 2018)

Udowodnij następujące fakty

a) Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to $-x^2 + 2x - 1 < 10$.

b) Jeżeli s i t są liczbami wymiernymi i $t \neq 0$, to liczba $\frac{s}{t}$ jest wymierna.

c) Jeżeli a, b i c są liczbami całkowitymi oraz $a|b$ i $b|c$, to $a|c$.

d) Jeżeli n i m są nieparzystymi liczbami naturalnymi, to $n \cdot m$ jest nieparzystą liczbą naturalną.

e) Niech $x \in \mathbb{Z}$. Wówczas liczba $11x - 7$ jest nieparzysta dokładnie wtedy, gdy liczba x jest parzysta.

f) Cięciwa koła nie może być dłuższa od jego średnicy.

g) Istnieje jedyna liczba całkowita x taka, że $x^2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}x$.

h) Dla każdej liczby rzeczywistej $r > 2$ istnieje taka liczba rzeczywista y, że

$$y = \frac{r}{2-r}.$$

i) Jeśli a, b, c są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $a + b + c$ jest podzielne przez 3.

j) Jeśli a, b, c są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ jest podzielne przez 3.

k) Jeśli prosta p jest równoległa do q, a prosta q jest równoległa do r, to p jest równoległa do r.

Zad. 1 Udowodnij lub obal poniższe twierdzenia (staraj się jednak nie wykonać obydwu poleceń naraz). Postaraj się przejrzyście sformułować krótki dowód. W każdej sytuacji oceń, czy mamy do czynienia ze stwierdzeniem uniwersalnym czy egzystencjalnym.

- Niech A będzie zbiorem. Jeśli $A \cap B = \emptyset$ dla dowolnego zbioru B, to $A = \emptyset$.
- Dla każdego niepustego zbioru A istnieje zbiór B taki, że $A \cup B = \emptyset$.
- Istnieją trzy różne liczby całkowite a, b, c takie, że $a^b = b^c$.
- Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.
- Dla każdej liczby naturalnej x istnieje liczba naturalna y taka, że $x < y < x^2$.

Zad. 2 Oceń poniższy dowód:

Twierdzenie: Każda parzysta liczba całkowita jest sumą dwóch nieparzystych liczb całkowitych.
Dowód: Załóżmy, że x i y są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Wówczas $x = 2k+1$ i $y = 2l+1$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$. Wobec tego $x + y = (2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1)$. Ponieważ $k + l + 1$ jest liczbą całkowitą, więc liczba $x + y$ jest parzysta, co kończy dowód.

Zad. 3 Oceń poniższy dowód:

Twierdzenie: Jeśli x jest liczbą niewymierną, a y liczbą wymierną, to $z = x - y$ jest liczbą niewymierną.

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że liczba $z = x - y$ jest wymierna. Wobec tego $z = \frac{a}{b}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Ponieważ $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, więc niech $x = \sqrt{2}$. Skoro $y \in \mathbb{Q}$, to $y = \frac{c}{d}$ dla pewnych $c, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Zatem

$$\sqrt{2} = x = y + z = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Ponieważ $ad + bc$ i bd są liczbami całkowitymi i $bd \neq 0$, więc $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, sprzeczność.

Wskazówki:

- Określ dokładnie założenia i tezę.
- Przypomnij sobie definicje wszystkich pojęć występujących w sformułowaniu twierdzenia.
- Przyjrzyj się uważnie tezie. Musisz zrozumieć, co jest celem dowodu.
- Używaj prozy, np. takich wyrażeń, jak „zatem”, „więc”, „czyli“, „wówczas”, „z tego wynika, że”.
- Jeżeli w dowodzie pojawia się nowe oznaczenie, należy je wprowadzić (*każdy aktor wchodzący na scenę dowodu musi zostać przedstawiony*, jak mawiali klasycy).
- Najlepiej pisać kolejne kroki dowodu jeden pod drugim, pisząc wyraźnie, z czego aktualnie korzystasz (definicji, założenia, znanego faktu).
- Dowód powinien być zapisany zdaniami w języku polskim. Nie należy rozpoczynać zdania od symbolu/wzoru, różne symbole/wzory powinny być oddzielone słowami.

Przestrogi. Tych metod dowodowych raczej nie powinno się stosować:

- Przez zaprzeczenie założenia.
- Przez założenie tezy.
- Przez rozważenie przypadków i zbagatelizowanie każdego z nich.
- Przez ogląd (*Jak widać...*).
- Przez autorytet (*Na pewno tak będzie.*).
- Przez przymus (*To musi być prawdą.*).
- Przez sztuciec (*A nuż wyjdzie.*).
- Na aferę (na początku założenie, w środku afera, na końcu teza).
- Metodą psychodeliczną (przez nadużycie symboli).
- Metodą ezoteryczną (*Intuicyjne czujemy, że ...*).
- Metodą optymistyczną (jest dobrze, bo jest dobrze - zakładamy założenie; ponieważ jest ono prawdziwe, to teza też).