WdM - zadania przed kolokwium nr 1

Kolokwium odbędzie się w trakcie ćwiczeń 22 marca i potrwa 60 minut. Po kolokwium odbędzie się omówienie zadań z kolokwium . Obowiązuje materiał z wykładów (list) 1–4.

Zad. 1 Dane są zbiory A i B. To, że x jest elementem A jest warunkiem koniecznym, by x był elementem B. Czy to oznacza, że

a) $A \subseteq B$,
b) $B \subseteq A$,
c) $A \cap B^c = \emptyset$,
d) $B \cap A^c = \emptyset$?

Zad. 2 Niech $A, B, C \subseteq X$. Ile różnych zbiorów można zapisać przy użyciu A, B, C, X oraz operacji $\cap$, $\cup$, ^{c}, $\setminus$? Uzasadnij odpowiedź.

Zad. 3 O czterech różnych liczbach rzeczywistych a, b, c, d wiemy, że

a) jeśli a jest mniejsza od b, to c jest mniejsza od d,
b) większa z liczb b, d jest mniejsza od większej z liczb a, c.

Czy stąd wynika, że $a < b$? Czy wynika, że $c > d$? Odpowiedź uzasadnij!

Zad. 4 Niech A będzie zbiorem liczb, które są kwadratami liczb naturalnych, B zbiorem ujemnych liczb rzeczywistych, a $C = \{n \in \mathbb{Z} \colon 2 < |n| < 6\}$.

a) Wypisz wszystkie elementy zbioru $(C \setminus B) \setminus A$.
b) Znajdź wszystkie elementy $U \in \mathcal{P}(C)$ takie, że $U \setminus B = \emptyset$, ale $U \cap A \neq \emptyset$.

Zad. 5 Wiemy, że zbiory A i B są niepuste. Pokaż, że $A \cap B = A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \times B = B \times A$. (Wskazówka: zamiast próbować dowodzić tego faktu bezpośrednio, spróbuj zrozumieć co *tak naprawdę* oznaczają te warunki dla zbiorów A i B i poprowadź dowód wykorzystując tę uwagę.) Co się zmieni, jeśli nie będziemy zakładali, że zbiory A i B są niepuste?

Zad. 6 Pokaż, że jeżeli p jest zdaniem prawdziwym, to dla każdego q mamy

a) $p \wedge q$ jest równoważne q,
b) $p \vee q$ jest równoważne p.

Co możemy powiedzieć, jeżeli p jest zdaniem fałszywym?

Zad. 7 Niech $p(x, y) \iff (|x| + |y| = 1)$, a $q(x, y) \iff (x \leq 2y)$. Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory

- $\{\langle x, y\rangle : p(x, y) \wedge q(x, y)\}$,
- $\{\langle x, y\rangle : p(x, y) \vee q(x, y)\}$,
- $\{\langle x, y\rangle : p(x, y) \implies q(x, y)\}$,
- $\{\langle x, y\rangle : p(x, y) \iff q(x, y)\}$.

Powtórz powyższe polecenie dla $p(x, y) \iff ((x - 1)^2 + y^2 \leq 2)$ i $q(x, y) \iff (x^2 + y^2 \leq 2)$. Czy otrzymane wykresy coś Ci przypominają?

Zad. 8 Czy prawdziwe jest zdanie: Ala zna Logikę wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdą, że nie jest prawdą, że Ala zna Logikę?

Zad. 9 Które z poniższych stwierdzeń *mogą być* prawdziwe dla pewnych zbiorów A i B?

a) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$,
b) $\langle\emptyset, \emptyset\rangle \in \mathcal{P}(A) \times A$,
c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \wedge B \cap A \neq \emptyset$,
d) $A \in B \wedge \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$.

Zad. 10 Załóżmy, że A i B są różnymi zbiorami. Czy warunek

$$\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$$

jest warunkiem koniecznym do $A \cap B = \emptyset$? A wystarczającym?

Zad. 11 Rozważmy zbiór $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taki, że

$$\langle n, N\rangle \in A \iff n \in N.$$

Zbadaj $\pi_{\mathbb{N}}[A]$, $\pi^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}[A]$ i A_5. Wykaż, że dla każdego $N \subseteq \mathbb{N}$

$$A^N = N.$$

(Tutaj, oczywiście, A^N jest cięciem poziomym zbioru A w N.)